

MEMS 陀螺动力学理论和数值 模拟技术

江衍辉

jyhnl@njust.edu.cn

南京理工大学

2022 年 11 月

简介

这份文档从理论解析和数值模拟两方面入手探讨了振动式陀螺(也称谐振式陀螺)相关的动力学理论和基于有限元的数值模拟方法,分为两章分别介绍,适合于初学者入门学习阅读。主要的创新之处在于:

1. 通过对科氏力和离心力作用下的双自由度谐振系统的研究,揭示了离心力对振动式陀螺有效量程起限制作用的原因,探究了科氏力和离心力作用下系统的正则运动,以及系统动力学方程稳态解参数和正则解参数之间的关系,证明了恒定转速下离心力项对动力学方程正则解形式无影响的结论。

2. 针对复杂结构在旋转条件下难于模拟的问题,提出了参数化建模方法和旋转有限元方法,并设计了一种用于计算旋转结构自然频率和模态的高效算法,该算法被应用于多环结构在高转速下的模态稳定性分析。此外,还提出了多环陀螺虚拟样机技术和基于该技术的陀螺性能参数的优化方法。

目 录

1. 振动式陀螺动力学.....	1
1.1 微阻尼单自由度谐振系统.....	1
1.2 科氏力和离心力作用下的双自由度谐振系统.....	3
1.3 科氏力和离心力作用下双自由度系统的正则运动.....	10
1.4 稳态解参数和正则解参数的关系.....	12
1.5 Lynch 平均法.....	14
1.5.1 Lynch 动力学方程及其稳态解.....	14
1.5.2 正则解参数的估计和不变量.....	18
1.5.3 正则解参数的演化.....	23
1.5.4 Lynch 陀螺的 PI 控制.....	29
1.6 本章小结.....	31
2. MEMS 多环陀螺数值模拟技术.....	33
2.1 结构参数化建模技术.....	33
2.2 基于有限元法的旋转结构模态分析.....	35
2.2.1 有限元法.....	35
2.2.2 结构模态分析算法.....	40
2.3 高转速下多环结构的模态稳定性分析.....	44
2.3.1 转动结构模态稳定性的概念.....	44
2.3.2 多环结构模态稳定性分析.....	47
2.4 陀螺虚拟样机和优化技术.....	55
2.5 本章小结.....	57

第 1 章 振动式陀螺动力学

1.1 微阻尼单自由度谐振系统

首先介绍一些基础的概念，我们简单回顾一下受线性阻尼和线性弹性约束的质量块的单自由度简谐受迫振动，其动力学方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_c \cos \omega t + f_s \sin \omega t \quad (1-1)$$

其中， x 为质量块的位置坐标， \dot{x} 为质量块的线速度， \ddot{x} 为质量块的线加速度， m 为质量块的质量， c 为阻尼， k 为刚度， f_c 和 f_s 为简谐外力余弦分量和正弦分量的幅值， ω 为简谐外力的圆频率（通常简称频率）， t 为时间。

为了物理概念阐述的方便，通常将方程(1-1)改写为如下形式，即方程两边同时除以 m

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = F_c \cos \omega t + F_s \sin \omega t \quad (1-2)$$

其中， $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 为受约束质量块的自然频率， $\xi = c/c_{cr} \geq 0$ 为阻尼比系数， $c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{mk}$ 为临界阻尼， $F_c = f_c/m$ ， $F_s = f_s/m$ 。从动力学方程(1-2)出发，采用待定系数法，假设质量块的运动达到稳态时方程(1-2)的解具有如下的形式

$$\bar{x} = c_x \cos \omega t + s_x \sin \omega t \quad (1-3)$$

其中， c_x 和 s_x 为待定系数。将方程(1-3)代入方程(1-2)中，分别比较正弦项和余弦项的系数可得关于待定系数的两个方程，整理为如下的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda^2 & 2\xi\lambda \\ -2\xi\lambda & 1-\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ s_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_c \\ u_s \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

其中， $\lambda = \omega/\omega_n \geq 0$ 为频率比系数， $u_c = f_c/k$ ， $u_s = f_s/k$ 为静态位移响应。应用 Cramer

法则解方程组(1-4)可得

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{\begin{vmatrix} u_c & 2\xi\lambda \\ u_s & 1-\lambda^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\lambda^2 & 2\xi\lambda \\ -2\xi\lambda & 1-\lambda^2 \end{vmatrix}} = \frac{(1-\lambda^2)u_c - 2\xi\lambda u_s}{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2} \\ s_x &= \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda^2 & u_c \\ -2\xi\lambda & u_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\lambda^2 & 2\xi\lambda \\ -2\xi\lambda & 1-\lambda^2 \end{vmatrix}} = \frac{(1-\lambda^2)u_s + 2\xi\lambda u_c}{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2} \end{aligned} \quad (1-5)$$

或整理为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} c_x \\ s_x \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2} \begin{bmatrix} 1-\lambda^2 & -2\xi\lambda \\ 2\xi\lambda & 1-\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ u_s \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

将方程(1-5)代回方程(1-3)可得

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{(1-\lambda^2)u_c - 2\xi\lambda u_s}{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2} \cos \omega t + \frac{(1-\lambda^2)u_s + 2\xi\lambda u_c}{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2} \sin \omega t \\ &= \frac{u_c}{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2} \left[(1-\lambda^2) \cos \omega t + 2\xi\lambda \sin \omega t \right] \\ &\quad + \frac{u_s}{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2} \left[-2\xi\lambda \cos \omega t + (1-\lambda^2) \sin \omega t \right] \end{aligned} \quad (1-7)$$

进一步观察，引入如下的三角变换

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{1-\lambda^2}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \\ \sin \phi &= \frac{-2\xi\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \end{aligned} \quad (1-8)$$

方程(1-7)可以重新写作如下形式

$$\bar{x} = \frac{u_c}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \cos(\omega t + \phi) + \frac{u_s}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \sin(\omega t + \phi) \quad (1-9)$$

由叠加原理知，对应于余弦载荷 $f_c \cos \omega t$ ，系统对应的稳态响应为

$$\bar{x}_c = \frac{u_c}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \cos(\omega t + \phi) \quad (1-10)$$

对应于正弦载荷 $f_s \sin \omega t$ ，系统对应的稳态响应为

$$\bar{x}_s = \frac{u_s}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \sin(\omega t + \phi) \quad (1-11)$$

小结

从方程(1-9)、方程(1-10)和方程(1-11)，我们可以得出以下重要的结论：

对于任意的简谐载荷，系统稳态响应的简谐基函数与载荷的简谐基函数一致，系统稳态响应的频率等于载荷的频率，系统稳态响应幅值相比于静态位移响应的放大倍数为

$$M = 1 / \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2} \quad (1-12)$$

系统稳态响应的初始相位增加了

$$\phi = -\arctan \frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1-13)$$

值得注意的是，当 $\lambda = \sqrt{1-2\xi^2}$ 时， M 取得极大值 $1/2\xi\sqrt{1-\xi^2}$ ，此时系统处于谐振状态（共振状态）。当阻尼比系数远远小于 1 时，即 $\xi \ll 1$ ，此时略去 ξ 的高次项，例如令 $\xi^2 \sim 0$ ，继而可得： $\lambda \sim 1$ ， $M \sim 1/2\xi$ ， $\phi \sim -\pi/2$ 。工程中通常用易于测量的品质因数 $Q = 1/2\xi$ 表征微阻尼系统的谐振性能，代入方程(1-9)，此时，谐振的稳态解可近似表示为

$$\bar{x} \approx Q \frac{f_c}{k} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + Q \frac{f_s}{k} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1-14)$$

1.2 科氏力和离心力作用下的双自由度谐振系统

考虑一个单轴转台，并在转台平面上放置一个质量块，质量块可在平面上任

意移动。建立转台的随体坐标系 $O\text{-}xyz$ 和标准正交基 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ，即共旋转坐标系。设转台平面与 $x\text{-}y$ 平面共面，且 $x\text{-}y$ 平面内任何一个方向上的阻尼 c 和刚度 k 都相同（全对称条件）。当转台匀速转动时，转速方向垂直于 $x\text{-}y$ 平面，设转速大小恒为 Ω （匀转速条件）。令某一时刻质量块在随体坐标系下的矢径为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad (1-15)$$

则其在惯性坐标系下的速度为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \Omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \\ &= (\dot{x} - \Omega y)\mathbf{i} + (\dot{y} + \Omega x)\mathbf{j} \end{aligned} \quad (1-16)$$

加速度为

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \Omega\mathbf{k} \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) \\ &= (\ddot{x} - \Omega\dot{y})\mathbf{i} + (\ddot{y} + \Omega\dot{x})\mathbf{j} + \Omega\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} \\ &= (\ddot{x} - \Omega\dot{y})\mathbf{i} + (\ddot{y} + \Omega\dot{x})\mathbf{j} + \Omega\mathbf{k} \times [(\dot{x} - \Omega y)\mathbf{i} + (\dot{y} + \Omega x)\mathbf{j}] \\ &= (\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} - \Omega^2 x)\mathbf{i} + (\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} - \Omega^2 y)\mathbf{j} \end{aligned} \quad (1-17)$$

此时，动力学方程为

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f} = (-c\dot{x} - kx + f_x)\mathbf{i} + (-c\dot{y} - ky + f_y)\mathbf{j} \quad (1-18)$$

合并同类项后可得如下方程组

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_x + 2\Omega m\dot{y} + \Omega^2 mx \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f_y - 2\Omega m\dot{x} + \Omega^2 my \end{cases} \quad (1-19)$$

由此可见，由于转速的存在，既引入了离心力

$$\mathbf{f}_{\text{Centrifuge}} = \Omega^2 mx\mathbf{i} + \Omega^2 my\mathbf{j} \quad (1-20)$$

也引入了科氏力

$$\mathbf{f}_{\text{Coriolis}} = 2\Omega m\dot{y}\mathbf{i} - 2\Omega m\dot{x}\mathbf{j} \quad (1-21)$$

我们注意到，离心力的存在降低了系统的刚度，而科氏力耦合了 $x\text{-}y$ 两个方向上

的运动，而我们从这样一个动力学系统中找到关于转速 Ω 与一些可测量的关系。由前一节得出的关于微阻尼单自由度谐振系统的结论，我们很自然地会想到了引入简谐外力，以便观察系统达到稳态后的特征，因此，我们引入动力学方程

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_{xc} \cos \omega t + f_{xs} \sin \omega t + 2\Omega m\dot{y} + \Omega^2 mx \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f_{yc} \cos \omega t + f_{ys} \sin \omega t - 2\Omega m\dot{x} + \Omega^2 my \end{cases} \quad (1-22)$$

与前一节类似，将动力学方程整理为如下的形式

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = F_{xc} \cos \omega t + F_{xs} \sin \omega t + 2\Omega\dot{y} + \Omega^2 x \\ \ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = F_{yc} \cos \omega t + F_{ys} \sin \omega t - 2\Omega\dot{x} + \Omega^2 y \end{cases} \quad (1-23)$$

采用待定系数法，并假设解的形式为

$$\begin{cases} x = c_x \cos \omega t + s_x \sin \omega t \\ y = c_y \cos \omega t + s_y \sin \omega t \end{cases} \quad (1-24)$$

基于假设方程(1-24)，计算假设解的一阶时间导数，即速度

$$\begin{cases} \dot{x} = -c_x \omega \sin \omega t + s_x \omega \cos \omega t \\ \dot{y} = -c_y \omega \sin \omega t + s_y \omega \cos \omega t \end{cases} \quad (1-25)$$

和二阶导数，即加速度

$$\begin{cases} \ddot{x} = -c_x \omega^2 \cos \omega t - s_x \omega^2 \sin \omega t \\ \ddot{y} = -c_y \omega^2 \cos \omega t - s_y \omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (1-26)$$

将方程(1-24)、方程(1-25)和方程(1-26)代入方程(1-23)可得

$$\begin{aligned} & \ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + (\omega_n^2 - \Omega^2)x = F_{xc} \cos \omega t + F_{xs} \sin \omega t + 2\Omega\dot{y} \\ & \Rightarrow \\ & -c_x \omega^2 \cos \omega t - s_x \omega^2 \sin \omega t \\ & + 2\xi\omega_n (-c_x \omega \sin \omega t + s_x \omega \cos \omega t) \\ & + (\omega_n^2 - \Omega^2)(c_x \cos \omega t + s_x \sin \omega t) \\ & = F_{xc} \cos \omega t + F_{xs} \sin \omega t + 2\Omega(-c_y \omega \sin \omega t + s_y \omega \cos \omega t) \end{aligned} \quad (1-27)$$

和

$$\begin{aligned}
& \ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + (\omega_n^2 - \Omega^2)y = F_{yc} \cos \omega t + F_{ys} \sin \omega t - 2\Omega\dot{x} \\
& \Rightarrow \\
& -c_y\omega^2 \cos \omega t - s_y\omega^2 \sin \omega t \\
& + 2\xi\omega_n(-c_y\omega \sin \omega t + s_y\omega \cos \omega t) \\
& + (\omega_n^2 - \Omega^2)(c_y \cos \omega t + s_y \sin \omega t) \\
& = F_{yc} \cos \omega t + F_{ys} \sin \omega t - 2\Omega(-c_x\omega \sin \omega t + s_x\omega \cos \omega t)
\end{aligned} \tag{1-28}$$

通过整理方程(1-27)和方程(1-28)中余弦项和正弦项的系数可得

$$\begin{aligned}
& -c_x\omega^2 + 2\xi\omega_n s_x\omega + (\omega_n^2 - \Omega^2)c_x = F_{xc} + 2\Omega s_y\omega \\
& -s_x\omega^2 - 2\xi\omega_n c_x\omega + (\omega_n^2 - \Omega^2)s_x = F_{xs} - 2\Omega c_y\omega \\
& -c_y\omega^2 + 2\xi\omega_n s_y\omega + (\omega_n^2 - \Omega^2)c_y = F_{yc} - 2\Omega s_x\omega \\
& -s_y\omega^2 - 2\xi\omega_n c_y\omega + (\omega_n^2 - \Omega^2)s_y = F_{ys} + 2\Omega c_x\omega
\end{aligned} \tag{1-29}$$

方程(1-29)可以重新整理为如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \omega_n^2 - \omega^2 - \Omega^2 & 2\xi\omega_n\omega & 0 & -2\Omega\omega \\ -2\xi\omega_n\omega & \omega_n^2 - \omega^2 - \Omega^2 & 2\Omega\omega & 0 \\ 0 & 2\Omega\omega & \omega_n^2 - \omega^2 - \Omega^2 & 2\xi\omega_n\omega \\ -2\Omega\omega & 0 & -2\xi\omega_n\omega & \omega_n^2 - \omega^2 - \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ s_x \\ c_y \\ s_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xc} \\ F_{xs} \\ F_{yc} \\ F_{ys} \end{bmatrix} \tag{1-30}$$

更进一步，将方程(1-30)两边同时除以 ω_n^2 可得

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda^2 - \kappa^2 & 2\xi\lambda & 0 & -2\kappa\lambda \\ -2\xi\lambda & 1 - \lambda^2 - \kappa^2 & 2\kappa\lambda & 0 \\ 0 & 2\kappa\lambda & 1 - \lambda^2 - \kappa^2 & 2\xi\lambda \\ -2\kappa\lambda & 0 & -2\xi\lambda & 1 - \lambda^2 - \kappa^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ s_x \\ c_y \\ s_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{xc} \\ u_{xs} \\ u_{yc} \\ u_{ys} \end{bmatrix} \tag{1-31}$$

从方程(1-31)可知，当外力幅值给定时，稳态响应幅值可以由此方程解析得到，影响稳态响应幅值的主要因素有三个：频率比系数 $\lambda = \omega/\omega_n$ 、阻尼比系数 $\xi = c/2\sqrt{km}$ 和转速比系数 $\kappa = \Omega/\omega_n > 0$ 共三个无量纲量。

我们考虑方程组(1-31)的求解。与前一节类似，应用 Cramer 法则进行求解，也可以应用计算机符号代数系统 (Matlab 等) 进行求解，此处略去了复杂的代数运算过程，直接给出如下结果

$$\begin{bmatrix} c_x \\ s_x \\ c_y \\ s_y \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} A & -B & D & C \\ B & A & -C & D \\ -D & -C & A & -B \\ C & -D & B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xc} \\ u_{xs} \\ u_{yc} \\ u_{ys} \end{bmatrix} \quad (1-32)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \alpha(\alpha^2 + \beta^2 - \chi^2) \\ B &= \beta(\alpha^2 + \beta^2 + \chi^2) \\ C &= \chi(\alpha^2 - \beta^2 - \chi^2) \\ D &= 2\alpha\beta\chi \\ E &= \alpha^4 + \beta^4 + \chi^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\chi^2 - 2\alpha^2\chi^2 \end{aligned} \quad (1-33)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \lambda^2 - \kappa^2 \\ \beta &= 2\xi\lambda \\ \chi &= 2\kappa\lambda \end{aligned} \quad (1-34)$$

当转速 $\Omega=0$ 时, 即 $\chi=0$, 此时 $C=0$ 且 $D=0$ 。方程组(1-32)解耦退化为两个方程组

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_x \\ s_x \end{bmatrix} &= \frac{1}{E} \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xc} \\ u_{xs} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c_y \\ s_y \end{bmatrix} &= \frac{1}{E} \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{yc} \\ u_{ys} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-35)$$

此时

$$\begin{aligned} A &= \alpha(\alpha^2 + \beta^2) \\ B &= \beta(\alpha^2 + \beta^2) \\ C &= 0 \\ D &= 0 \\ E &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 \end{aligned} \quad (1-36)$$

每个方程组与方程组(1-6)是相同的, x 和 y 方向质量块做独立解耦的单自由度振动, 这验证了计算的正确性。

当转速 $\Omega \neq 0$ 时, 考虑无阻尼条件, 即 $\beta = 0$, 且只考虑 x 方向上的正弦载荷, 即令 $u_{xc} = 0$, $u_{yc} = 0$ 和 $u_{ys} = 0$, 此时

$$\begin{aligned} A &= \alpha(\alpha^2 - \chi^2) \\ B &= 0 \\ C &= \chi(\alpha^2 - \chi^2) \\ D &= 0 \\ E &= (\alpha^2 - \chi^2)^2 \end{aligned} \quad (1-37)$$

可得

$$\begin{bmatrix} c_x \\ s_x \\ c_y \\ s_y \end{bmatrix} = \frac{u_{xs}}{\alpha^2 - \chi^2} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\chi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-38)$$

代入方程(1-24), 可得

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{u_{xs}\alpha}{\alpha^2 - \chi^2} \sin \omega t \\ \bar{y} = -\frac{u_{xs}\chi}{\alpha^2 - \chi^2} \cos \omega t \end{cases} \quad (1-39)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \chi^2 &= (1 - \lambda^2 - \kappa^2)^2 - (2\kappa\lambda)^2 \\ &= [1 - (\lambda + \kappa)^2][1 - (\lambda - \kappa)^2] \end{aligned} \quad (1-40)$$

工程上, 对于工作在力平衡模式下的陀螺, 常称 \bar{x} 为驱动模态, \bar{y} 为检测模态。

小结

从方程(1-39), 我们可以得出以下重要的结论:

- (1) 当陀螺工作在力平衡模式下, 无阻尼条件下, 驱动模态与载荷同相, 检测模态与载荷有 $\pi/2$ 的相位差。
- (2) 当陀螺工作在力平衡模式下, 理论上, 由于离心力效应, 检测模态的

幅值并不正比于转速

$$-\frac{u_{xs}\chi}{\alpha^2 - \chi^2} \propto \chi \propto \Omega \quad (1-41)$$

(3) 当陀螺工作在力平衡模式下, 且 $\chi \ll 1$, 即 $\Omega \ll \omega_n$ 时, 略去 χ 的高阶项后, 有近似的线性关系

$$-\frac{u_{xs}\chi}{\alpha^2 - \chi^2} \sim -\frac{u_{xs}\chi}{(1 - \lambda^2)^2} \propto \chi \propto \Omega \quad (1-42)$$

(4) 当陀螺工作在力平衡模式下, 且 $\chi \ll 1$, 即 $\Omega \ll \omega_n$ 时, 利用共振 $\lambda \sim 1$ 和增加载荷幅值 $u_{xs} \uparrow$ 可以提高陀螺的标度因数

$$\frac{y}{\Omega} = -\frac{1}{\omega_n} \frac{2u_{xs}\lambda}{(1 - \lambda^2)^2} \quad (1-43)$$

经验表明, 对于一般工作在 $\omega_n \sim 10^4 \text{Hz}$ 量级的力平衡陀螺, 测量转速在 $\Omega \sim 10^2 \text{/s}$ 量级内满足线性关系, 结合以上结论, 力平衡陀螺不适用于高转速测量。

当转速 $\Omega \neq 0$ 时, 考虑微阻尼条件, 即 $\beta \ll 1$, 略去 β 的高阶小项, 且只考虑 x 方向上的正弦载荷, 即令 $u_{xc} = 0$, $u_{yc} = 0$ 和 $u_{ys} = 0$, 此时

$$\begin{aligned} A &= \alpha(\alpha^2 - \chi^2) \\ B &= \beta(\alpha^2 + \chi^2) \\ C &= \chi(\alpha^2 - \chi^2) \\ D &= 2\alpha\beta\chi \\ E &= (\alpha^2 - \chi^2)^2 \end{aligned} \quad (1-44)$$

可得

$$\begin{bmatrix} c_x \\ s_x \\ c_y \\ s_y \end{bmatrix} = \frac{u_{xs}}{\alpha^2 - \chi^2} \begin{bmatrix} -\beta(\alpha^2 + \chi^2)/(\alpha^2 - \chi^2) \\ \alpha \\ -\chi \\ -2\alpha\beta\chi(\alpha^2 - \chi^2) \end{bmatrix} \quad (1-45)$$

代入方程(1-24), 可得

$$\begin{cases} \bar{x} = -\frac{\beta(\alpha^2 + \chi^2)u_{xs}}{(\alpha^2 - \chi^2)^2} \cos \omega t + \frac{u_{xs}\alpha}{\alpha^2 - \chi^2} \sin \omega t \\ \bar{y} = -\frac{u_{xs}\chi}{\alpha^2 - \chi^2} \cos \omega t - u_{xs} 2\alpha\beta\chi \sin \omega t \end{cases} \quad (1-46)$$

小结:

从方程(1-46), 相较于无阻尼时的稳态响应, 我们可以得出以下结论:

- (1) 微阻尼的存在使驱动模态和检测模态的幅值和相位发生变化。
- (2) 微阻尼的存在使阻尼谐振频率发生变化。

1.3 科氏力和离心力作用下双自由度系统的正则运动

正则运动即无驱动外力下的自由运动, 为了描述的方便, 我们引入质量块矢径在复平面上的复数表示

$$z = x + iy \quad (1-47)$$

因此, 考虑科氏力和离心力作用下质点的动力学方程可以记作

$$\ddot{z} + 2\Omega i \dot{z} + (\omega_n^2 - \Omega^2)z = 0 \quad (1-48)$$

此处假设 (1) 无阻尼 (2) 全对称 (3) 无外力作用。假设方程的解为

$$z = z_0 e^{st} \quad (1-49)$$

将方程(1-49)代入方程(1-48), 可得特征方程为

$$s^2 + 2\Omega i s + \omega_n^2 - \Omega^2 = 0 \quad (1-50)$$

解得两特征根为

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-2\Omega i + \sqrt{-4\omega_n^2}}{2} = -\Omega i + \omega_n i = -\Omega_1 i \\ s_2 &= -\Omega i - \omega_n i = -\Omega_2 i \end{aligned} \quad (1-51)$$

其中

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \Omega - \omega_n \\ \Omega_2 &= \Omega + \omega_n\end{aligned}\quad (1-52)$$

因此，方程(1-48)的通解为

$$\begin{aligned}z &= z_1 e^{s_1 t} + z_2 e^{s_2 t} \\ &= r_1 e^{i(\theta_1 - \Omega_1 t)} + r_2 e^{i(\theta_2 - \Omega_2 t)} \\ &= r_1 e^{i\theta_1} e^{i\omega_n t} e^{-i\Omega t} + r_2 e^{i\theta_2} e^{-i\omega_n t} e^{-i\Omega t} \\ &= r_1 e^{i\theta_0 + i\phi_0} e^{i\omega_n t} e^{-i\Omega t} + r_2 e^{i\theta_0 - i\phi_0} e^{-i\omega_n t} e^{-i\Omega t} \\ &= e^{i(\theta_0 - \Omega t)} \left(r_1 e^{i(\omega_n t + \phi_0)} + r_2 e^{-i(\omega_n t + \phi_0)} \right) \\ &= e^{i(\theta_0 - \Omega t)} \left[a \cos(\omega_n t + \phi_0) + iq \sin(\omega_n t + \phi_0) \right]\end{aligned}\quad (1-53)$$

其中

$$\begin{aligned}\theta_0 &= (\theta_1 + \theta_2)/2 \\ \phi_0 &= (\theta_1 - \theta_2)/2 \\ a &= r_1 + r_2 \\ q &= r_1 - r_2\end{aligned}\quad (1-54)$$

小结：

陀螺的运动是两个圆周运动的叠加。

(1) 当 $\omega_n \sim 0$ 时，即无谐振，此时方程的解可以近似表示为

$$z = e^{i(\theta_0 - \Omega t)} \left[a \cos(\phi_0) + iq \sin(\phi_0) \right] \quad (1-55)$$

此时，陀螺的运动轨迹为一个圆周。

(2) 当 $\Omega \sim 0$ 时，即无转动，此时方程的解可以近似表示为

$$z = e^{i\theta_0} \left[a \cos(\omega_n t + \phi_0) + iq \sin(\omega_n t + \phi_0) \right] \quad (1-56)$$

此时，陀螺的运动轨迹为一个椭圆。

(3) 当谐振和转动同时进行，陀螺的运动可以看做二者的叠加，此时，陀螺的运动轨迹为振动椭圆的进动。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_0 - \Omega t) & -\sin(\theta_0 - \Omega t) \\ \sin(\theta_0 - \Omega t) & \cos(\theta_0 - \Omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \cos(\omega_n t + \phi_0) \\ q \sin(\omega_n t + \phi_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \cos(\omega_n t + \phi_0) \\ q \sin(\omega_n t + \phi_0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-57)$$

其中 a 、 q 、 ϕ_0 和 θ_0 为由初始条件确定的四个参数，而 θ 为进动角

$$\theta = \theta_0 - \Omega t \quad (1-58)$$

由此可见，固定在转台上的谐振子在转台旋转产生的离心力和科氏力的共同作用下发生与转台反向的进动，也即遵循动量守恒。

(4) 通过测量陀螺振动模态的进动角 θ 确定转台转速 Ω 的基本原理：以横坐标为时间 t ，纵坐标为进动角 θ 作图，得到一条单调递减的直线，计算直线的斜率，斜率大小即为转速大小。在非理想条件下，四个正则解参数除了受到初始条件的影响，还受到阻尼力，频率差等因素的干扰，因此需要引入控制方案以消除这些干扰因素的影响。按以上原理工作的陀螺称为速率积分模式（全角模式）陀螺，此时，需要产生和保持用于测量进动角的谐振模态。

1.4 稳态解参数和正则解参数的关系

从理论层面说，求一个线性动力学系统的稳态解和正则解，是分别利用周期性外力条件和初始条件对系统的特征进行检查。

陀螺在受周期性载荷作用时做稳态周期运动，此时动力学方程的解称为稳态解，即方程(1-24)，写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x \cos \omega t + s_x \sin \omega t \\ c_y \cos \omega t + s_y \sin \omega t \end{bmatrix} \quad (1-59)$$

对于处于稳态的陀螺，如果突然撤去外力并忽略阻尼效应，陀螺将在惯性的作用下做自由振动，相当于无外力条件下只给了初始条件，此时运动方程的解称为正

则解，即方程(1-57)，展开为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \cos(\omega_n t + \phi_0) \\ q \sin(\omega_n t + \phi_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \cos \theta (\cos \phi_0 \cos \omega_n t - \sin \phi_0 \sin \omega_n t) \\ -q \sin \theta (\sin \phi_0 \cos \omega_n t + \cos \phi_0 \sin \omega_n t) \\ a \sin \theta (\cos \phi_0 \cos \omega_n t - \sin \phi_0 \sin \omega_n t) \\ +q \cos \theta (\sin \phi_0 \cos \omega_n t + \cos \phi_0 \sin \omega_n t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-60)$$

比较式(1-59)和式(1-60)，其中令 $\omega = \omega_n$ ，则有：

$$\begin{aligned} c_x &= a \cos \theta \cos \phi_0 - q \sin \theta \sin \phi_0 \\ s_x &= -a \cos \theta \sin \phi_0 - q \sin \theta \cos \phi_0 \\ c_y &= a \sin \theta \cos \phi_0 + q \cos \theta \sin \phi_0 \\ s_y &= -a \sin \theta \sin \phi_0 + q \cos \theta \cos \phi_0 \end{aligned} \quad (1-61)$$

通过计算，可得如下的关系式：

$$c_x^2 = a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi_0 + q^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi_0 - 2aq \cos \theta \cos \phi_0 \sin \theta \sin \phi_0 \quad (1-62)$$

$$s_x^2 = a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi_0 + q^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi_0 + 2aq \cos \theta \cos \phi_0 \sin \theta \sin \phi_0 \quad (1-63)$$

$$c_y^2 = a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi_0 + q^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi_0 + 2aq \cos \theta \cos \phi_0 \sin \theta \sin \phi_0 \quad (1-64)$$

$$s_y^2 = a^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi_0 + q^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi_0 - 2aq \cos \theta \cos \phi_0 \sin \theta \sin \phi_0 \quad (1-65)$$

$$\begin{aligned} c_x s_x &= -a^2 \cos^2 \theta \cos \phi_0 \sin \phi_0 + q^2 \sin^2 \theta \cos \phi_0 \sin \phi_0 \\ &\quad + aq \cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi_0 - aq \cos \theta \sin \theta \cos^2 \phi_0 \end{aligned} \quad (1-66)$$

$$\begin{aligned} c_y s_y &= -a^2 \sin^2 \theta \cos \phi_0 \sin \phi_0 + q^2 \cos^2 \theta \sin \phi_0 \cos \phi_0 \\ &\quad - aq \cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi_0 + aq \cos \theta \sin \theta \cos^2 \phi_0 \end{aligned} \quad (1-67)$$

$$\begin{aligned} c_x c_y &= a^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \phi_0 - q^2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi_0 \\ &\quad + aq \cos^2 \theta \cos \phi_0 \sin \phi_0 - aq \sin^2 \theta \cos \phi_0 \sin \phi_0 \end{aligned} \quad (1-68)$$

$$\begin{aligned} s_x s_y &= a^2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi_0 - q^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \phi_0 \\ &\quad - aq \cos^2 \theta \cos \phi_0 \sin \phi_0 + aq \sin^2 \theta \cos \phi_0 \sin \phi_0 \end{aligned} \quad (1-69)$$

$$\begin{aligned} c_x s_y &= -a^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi_0 \sin \phi_0 - q^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi_0 \sin \phi_0 \\ &\quad + aq \cos^2 \theta \cos^2 \phi_0 + aq \sin^2 \theta \sin^2 \phi_0 \end{aligned} \quad (1-70)$$

$$\begin{aligned} c_y s_x &= -a^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi_0 \sin \phi_0 - q^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi_0 \sin \phi_0 \\ &\quad - aq \cos^2 \theta \sin^2 \phi_0 - aq \sin^2 \theta \cos^2 \phi_0 \end{aligned} \quad (1-71)$$

同时，我们注意到有如下的不变量关系

$$I_1 = c_x^2 + s_x^2 + c_y^2 + s_y^2 = a^2 + q^2 \quad (1-72)$$

$$I_2 = c_x^2 + s_x^2 - c_y^2 - s_y^2 = (a^2 - q^2) \cos 2\theta \quad (1-73)$$

$$I_3 = c_x^2 - s_x^2 + c_y^2 - s_y^2 = (a^2 - q^2) \cos 2\phi_0 \quad (1-74)$$

$$I_4 = 2(c_x s_y - c_y s_x) = 2aq \quad (1-75)$$

$$I_5 = 2(c_x c_y + s_x s_y) = (a^2 - q^2) \sin 2\theta \quad (1-76)$$

$$I_6 = 2(c_x s_x + c_y s_y) = -(a^2 - q^2) \sin 2\phi_0 \quad (1-77)$$

小结

当已知受迫振动的稳态解参数（即 c_x 、 s_x 、 c_y 和 s_y ），依据这些公式，可以迅速地求解相对应的正则解参数

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(I_1 + \sqrt{I_1^2 - I_4^2} \right)} \\ q &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(I_1 - \sqrt{I_1^2 - I_4^2} \right)} \\ \theta &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{I_5}{I_2} \right) \\ \phi_0 &= -\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{I_6}{I_3} \right) \end{aligned} \quad (1-78)$$

1.5 Lynch 平均法

1.5.1 Lynch 动力学方程及其稳态解

1995 年，Lynch 在一份技术报告中提出了用于描述双自由度振动式陀螺的通用动力学方程和用于近似求解方程的平均法。方程考虑了刚度主轴的偏转、阻尼主轴的偏转、两主轴刚度和阻尼的不一致等因素。由于 Lynch 的报告过于简略抽

象，且大量采用了复数记法和运算，我们将结合前面几节介绍的内容，将其进一步充实并相应地给出矩阵记法和运算，以益于读者理解及后续内容的介绍。

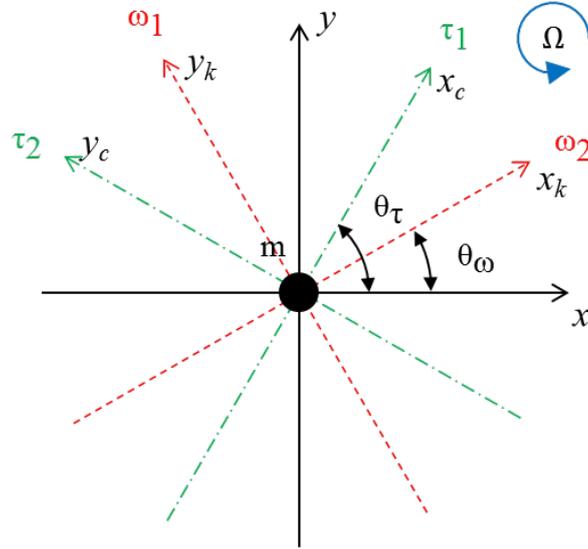


图-1 通用双自由度振动陀螺模型

我们将质量块的矢径和受到的外力分别记作

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad (1-79)$$

我们略去推导过程（注：参考 Lynch 报告），直接给出动力学方程为

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{z}} + 2 \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) (\sigma_3 \cos 2\theta_\tau + \sigma_1 \sin 2\theta_\tau) - ik\Omega\sigma_2 \right] \dot{\mathbf{z}} \\ + \left[\omega^2 - k'\Omega^2 - \omega\Delta\omega (\sigma_3 \cos 2\theta_\omega + \sigma_1 \sin 2\theta_\omega) - ik\dot{\Omega}\sigma_2 \right] \mathbf{z} = \mathbf{f} \end{aligned} \quad (1-80)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}; \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \\ \omega\Delta\omega &= \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}; \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) = \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \end{aligned} \quad (1-81)$$

为简化的参数记号，其中 ω_1 和 ω_2 为两刚度主轴的自然频率， τ_1 和 τ_2 为两阻尼主轴的耗散特征时间， θ_ω 和 θ_τ 为刚度主轴和阻尼主轴的偏转角，具体定义请参考图-1。

此外，方程中还引入了 Pauli 常数矩阵

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1-82)$$

和增益常数 k 和 k' 。(注：方程中的标量默认已乘以单位矩阵 \mathbf{I})

为了求解方程(1-80)，Lynch 假设 ω_1 和 ω_2 非常近似于 ω ，且假设系统在频率为 ω 的简谐激励下，稳态响应的幅值和相位在周期 $2\pi/\omega$ 内随时间的变化十分缓慢（即慢变量假设）。Lynch 引入了频率为 ω ，初始相位为 ϕ 简谐载荷。

$$\mathbf{f} = \text{Re} \left\{ \mathbf{F}(t) e^{-i[\omega t + \phi(t)]} \right\} = \begin{bmatrix} f_{x_c} \cos[\omega t + \phi(t)] + f_{x_s} \sin[\omega t + \phi(t)] \\ f_{y_c} \cos[\omega t + \phi(t)] + f_{y_s} \sin[\omega t + \phi(t)] \end{bmatrix} \quad (1-83)$$

其中

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{x_c} + i f_{x_s} \\ f_{y_c} + i f_{y_s} \end{bmatrix} \quad (1-84)$$

从第一节和第二节关于稳态解的讨论，我们可知稳态解具有如下形式

$$\mathbf{z} = \text{Re} \left\{ \mathbf{C}(t) e^{-i[\omega t + \phi(t)]} \right\} = \begin{bmatrix} c_x \cos[\omega t + \phi(t)] + s_x \sin[\omega t + \phi(t)] \\ c_y \cos[\omega t + \phi(t)] + s_y \sin[\omega t + \phi(t)] \end{bmatrix} \quad (1-85)$$

其中

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_x + i s_x \\ c_y + i s_y \end{bmatrix} \quad (1-86)$$

在 Lynch 的报告中，基于慢变量假设对动力学方程进行了简化，但并没有给出简化的过程，我们在这里进行详细的推导。首先，我们给出速度和加速度的表达式

$$\dot{\mathbf{z}} = \text{Re} \left[\dot{\mathbf{C}} e^{-i(\omega t + \phi)} - i \mathbf{C} (\omega + \dot{\phi}) e^{-i(\omega t + \phi)} \right] \quad (1-87)$$

$$\ddot{\mathbf{z}} = \text{Re} \left[\ddot{\mathbf{C}} e^{-i(\omega t + \phi)} - 2i \dot{\mathbf{C}} (\omega + \dot{\phi}) e^{-i(\omega t + \phi)} - \mathbf{C} (\omega + \dot{\phi})^2 e^{-i(\omega t + \phi)} - i \dot{\mathbf{C}} \ddot{\phi} e^{-i(\omega t + \phi)} \right] \quad (1-88)$$

将方程(1-83)、方程(1-85)、方程(1-87)和方程(1-88)代入(1-80)，并略去离心力项

和角加速度项, 可得

$$\begin{aligned}
& \ddot{\mathbf{z}} + 2 \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) (\boldsymbol{\sigma}_3 \cos 2\theta_\tau + \boldsymbol{\sigma}_1 \sin 2\theta_\tau) - ik\Omega \boldsymbol{\sigma}_2 \right] \dot{\mathbf{z}} \\
& + \left[\omega^2 - \omega \Delta \omega (\boldsymbol{\sigma}_3 \cos 2\theta_\omega + \boldsymbol{\sigma}_1 \sin 2\theta_\omega) \right] \mathbf{z} = \mathbf{f} \\
& \Rightarrow \\
& \left[\ddot{\mathbf{C}} - 2i\dot{\mathbf{C}}(\omega + \dot{\phi}) + \mathbf{C}(\omega + \dot{\phi})^2 - i\dot{\mathbf{C}}\ddot{\phi}e^{-i(\omega t + \phi)} \right] \\
& + 2 \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) (\boldsymbol{\sigma}_3 \cos 2\theta_\tau + \boldsymbol{\sigma}_1 \sin 2\theta_\tau) - ik\Omega \boldsymbol{\sigma}_2 \right] \left[\dot{\mathbf{C}} - i\mathbf{C}(\omega + \dot{\phi}) \right] \\
& + \left[\omega^2 - \omega \Delta \omega (\boldsymbol{\sigma}_3 \cos 2\theta_\omega + \boldsymbol{\sigma}_1 \sin 2\theta_\omega) \right] \mathbf{C} = \mathbf{F}
\end{aligned} \tag{1-89}$$

在方程(1-89)中, 由于假设幅值和相位变化缓慢, 即

$$\ddot{\mathbf{C}} \ll 1; \dot{\mathbf{C}} \ll 1; \ddot{\phi} \ll 1; \dot{\phi} \ll 1 \tag{1-90}$$

Lynch 进一步略去了包含二阶导数 $\ddot{\mathbf{C}}$ 和 $\ddot{\phi}$ 的所有项, 以及包含 $\dot{\mathbf{C}}$ 和 $\dot{\phi}$ 的高阶项, 最后只剩下 $-2i\omega\dot{\mathbf{C}}$ 项和 $-2\omega\mathbf{C}\dot{\phi}$ 项。因此, 简化后的动力学方程为

$$\begin{aligned}
& -2i\omega\dot{\mathbf{C}} - \mathbf{C}\omega^2 - 2\omega\dot{\phi}\mathbf{C} \\
& -2i\omega\mathbf{C} \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) (\boldsymbol{\sigma}_3 \cos 2\theta_\tau + \boldsymbol{\sigma}_1 \sin 2\theta_\tau) - ik\Omega \boldsymbol{\sigma}_2 \right] \\
& + \left[\omega^2 - \omega \Delta \omega (\boldsymbol{\sigma}_3 \cos 2\theta_\omega + \boldsymbol{\sigma}_1 \sin 2\theta_\omega) \right] \mathbf{C} = \mathbf{F}
\end{aligned} \tag{1-91}$$

在方程(1-91)两边同时除以 $-2i\omega$, 可得

$$\begin{aligned}
& \dot{\mathbf{C}} - i\dot{\phi}\mathbf{C} + \mathbf{C} \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) (\boldsymbol{\sigma}_3 \cos 2\theta_\tau + \boldsymbol{\sigma}_1 \sin 2\theta_\tau) - ik\Omega \boldsymbol{\sigma}_2 \right] \\
& + \left[-\frac{i}{2} \Delta \omega (\boldsymbol{\sigma}_3 \cos 2\theta_\omega + \boldsymbol{\sigma}_1 \sin 2\theta_\omega) \right] \mathbf{C} = \frac{\mathbf{F}}{-2i\omega}
\end{aligned} \tag{1-92}$$

最后, 方程(1-92)记为以下简单的形式

$$\dot{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{C} = \frac{i}{2\omega} \mathbf{F} \tag{1-93}$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) (\boldsymbol{\sigma}_3 \cos 2\theta_\tau + \boldsymbol{\sigma}_1 \sin 2\theta_\tau) - ik\Omega \boldsymbol{\sigma}_2 \\ & - i\dot{\phi} - \frac{i}{2} \Delta \omega (\boldsymbol{\sigma}_3 \cos 2\theta_\omega + \boldsymbol{\sigma}_1 \sin 2\theta_\omega) \end{aligned} \quad (1-94)$$

为了后续计算的方便，我们简要介绍 Pauli 矩阵的一些性质，读者可以自行验证。

性质 (1) $\boldsymbol{\sigma}_2^2 = \mathbf{I}$

性质 (2)

$$\begin{aligned} e^{i\boldsymbol{\sigma}_2\theta} &= \mathbf{I} + i\boldsymbol{\sigma}_2\theta + \frac{1}{2!}(i\boldsymbol{\sigma}_2\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\boldsymbol{\sigma}_2\theta)^3 + \dots \\ &= \left[1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \dots \right] \mathbf{I} + \left[i\boldsymbol{\sigma}_2\theta - \frac{1}{3!}i\boldsymbol{\sigma}_2\theta^3 + \dots \right] \\ &= \cos\theta \mathbf{I} + i\boldsymbol{\sigma}_2 \sin\theta \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

性质 (3) $(e^{i\boldsymbol{\sigma}_2\theta})^{-1} = (e^{i\boldsymbol{\sigma}_2\theta})^T = e^{-i\boldsymbol{\sigma}_2\theta}$

性质 (4) $\boldsymbol{\sigma}_1 = i\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2$

利用 Pauli 矩阵的性质，可以简化 Γ 为以下形式

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \boldsymbol{\sigma}_3 e^{2i\boldsymbol{\sigma}_2\theta_\tau} - ik\Omega \boldsymbol{\sigma}_2 - i\dot{\phi} - \frac{i}{2} \Delta \omega \boldsymbol{\sigma}_3 e^{2i\boldsymbol{\sigma}_2\theta_\omega} \quad (1-95)$$

1.5.2 正则解参数的估计和不变量

在第三节和第四节中，我们介绍了陀螺动力学方程的正则解及其与稳态解之间的关系，并考虑了离心力的影响。在此，为了与 Lynch 的简化动力学方程一致，我们略去离心力效应，并证明正则解的形式不变。已知对于全对称的理想振动，动力学方程为

$$\ddot{\mathbf{z}}' + \omega^2 \mathbf{z}' = 0 \quad (1-96)$$

正则解为

$$\mathbf{z}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \cos(\omega t + \phi') \\ q \sin(\omega t + \phi') \end{bmatrix} \quad (1-97)$$

其中 a 、 q 、 θ' 和 ϕ' 可由四个初始条件确定。此时，当引入转动后，即旧坐标系 $O-x'y'z'$ 转动至新坐标系 $O-xyz$ ，设此时转角为 Ωt ，正则解(1-97)在新坐标系中则可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \mathbf{z}' = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \cos(\omega t + \phi') \\ q \sin(\omega t + \phi') \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta' - \Omega t) & -\sin(\theta' - \Omega t) \\ \sin(\theta' - \Omega t) & \cos(\theta' - \Omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \cos(\omega t + \phi') \\ q \sin(\omega t + \phi') \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \cos(\omega t + \phi') \\ q \sin(\omega t + \phi') \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-98)$$

可见，式(1-98)和式(1-57)的形式一致。

正则运动因其适用于角度测量是全角陀螺的理想运动（从控制学角度也称为目标运动），研究陀螺动力学的任务之一是从动力学分析中找出实现目标运动的控制方法，而不仅仅是建立测量原理。我们从正则解(1-98)和稳态解(1-85)的比较出发，首先将式(1-98)重新写为

$$\mathbf{z} = \operatorname{Re}(e^{-i\sigma_2 t} \mathbf{z}_0 e^{-i(\omega t + \phi)}) \quad (1-99)$$

其中

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} a \\ iq \end{bmatrix} \quad (1-100)$$

令正则解(1-99)等于稳态解(1-85)，则有

$$\mathbf{C} = e^{-i\sigma_2 t} \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} \quad (1-101)$$

其中

$$\delta\phi = \phi - \phi' \quad (1-102)$$

我们在第四节中采用矩阵记法和运算已经讨论了正则解与稳态解之间的关系，建立这种关系的意义在于通过实际中容易测量的稳态解参数（即 c_x 、 s_x 、 c_y 和 s_y ）估计正则解参数（即 a 、 q 、 θ 和 ϕ' ），以便于控制。我们注意到在 Lynch 的报告中只给出了结果，而没给出推导过程，因此，我们基于式(1-101)将推导过程整理如下：

(1) $E = \tilde{\mathbf{C}}^T \cdot \mathbf{C}$ （注：波浪线表示取复数共轭）

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_x - is_x & c_y - is_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x + is_x \\ c_y + is_y \end{bmatrix} &= c_x^2 + s_x^2 + c_y^2 + s_y^2 \\ (e^{-i\delta\phi})^T \tilde{\mathbf{z}}_0^T (e^{-i\sigma_2\theta})^T e^{-i\sigma_2\theta} \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} &= (e^{-i\delta\phi})^T \tilde{\mathbf{z}}_0^T \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} = a^2 + q^2 \end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{E} = c_x^2 + s_x^2 + c_y^2 + s_y^2 = a^2 + q^2 \quad (1-103)$$

(2) $Q = \tilde{\mathbf{C}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{C}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_x - is_x & c_y - is_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x + is_x \\ c_y + is_y \end{bmatrix} \\ = -i \left[c_x c_y + s_x s_y - i (s_x c_y - c_x s_y) \right] + i \left[c_x c_y + s_x s_y + i (s_x c_y - c_x s_y) \right] \\ = 2(c_x s_y - c_y s_x) = 2 \det \begin{bmatrix} c_x & c_y \\ s_x & s_y \end{bmatrix} \\ (e^{-i\delta\phi})^T \tilde{\mathbf{z}}_0^T (e^{-i\sigma_2\theta})^T \boldsymbol{\sigma}_2 e^{-i\sigma_2\theta} \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} \\ = (e^{-i\delta\phi})^T \tilde{\mathbf{z}}_0^T \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} = \begin{bmatrix} a & -iq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ iq \end{bmatrix} = 2aq \end{aligned}$$

因此

$$Q = 2(c_x s_y - c_y s_x) = 2aq \quad (1-104)$$

$$(3) R = \tilde{\mathbf{C}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{C}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_x - is_x & c_y - is_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x + is_x \\ c_y + is_y \end{bmatrix} = c_x^2 + s_x^2 - c_y^2 - s_y^2 \\ & (e^{-i\delta\phi})^T \tilde{\mathbf{z}}_0^T (e^{-i\sigma_2\theta})^T \boldsymbol{\sigma}_3 e^{-i\sigma_2\theta} \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} = (e^{-i\delta\phi})^T \tilde{\mathbf{z}}_0^T \boldsymbol{\sigma}_3 \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} \\ & = [\mathbf{a} \quad -iq] \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ iq \end{bmatrix} \\ & = [\mathbf{a} \quad -iq] \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ iq \end{bmatrix} \\ & = (\mathbf{a}^2 - q^2) \cos 2\theta \end{aligned}$$

因此

$$R = c_x^2 + s_x^2 - c_y^2 - s_y^2 = (\mathbf{a}^2 - q^2) \cos 2\theta \quad (1-105)$$

$$(4) S = \tilde{\mathbf{C}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{C}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_x - is_x & c_y - is_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x + is_x \\ c_y + is_y \end{bmatrix} \\ & = [c_x c_y + s_x s_y - i(s_x c_y - c_x s_y)] + [c_x c_y + s_x s_y + i(s_x c_y - c_x s_y)] \\ & = 2(c_x c_y + s_x s_y) \\ & (e^{-i\delta\phi})^T \tilde{\mathbf{z}}_0^T (e^{-i\sigma_2\theta})^T \boldsymbol{\sigma}_1 e^{-i\sigma_2\theta} \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} \\ & = [\mathbf{a} \quad -iq] \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ iq \end{bmatrix} \\ & = [\mathbf{a} \quad -iq] \begin{bmatrix} \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ iq \end{bmatrix} \\ & = \mathbf{a}^2 \sin 2\theta - q^2 \sin 2\theta = (\mathbf{a}^2 - q^2) \sin 2\theta \end{aligned}$$

因此

$$S = 2(c_x c_y + s_x s_y) = (\mathbf{a}^2 - q^2) \sin 2\theta \quad (1-106)$$

$$(5) L = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c_x + is_x & c_y + is_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x + is_x \\ c_y + is_y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_x^2 - s_x^2 + 2c_x s_x i \\ c_y^2 - s_y^2 + 2c_y s_y i \end{bmatrix} \\
&= c_x^2 - s_x^2 + c_y^2 - s_y^2 + 2i(c_x s_x + c_y s_y) \\
& (e^{i\delta\phi})^T \mathbf{z}_0^T (e^{-i\sigma_2\theta})^T e^{-i\sigma_2\theta} \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} = \mathbf{z}_0^T \mathbf{z}_0 e^{2i\delta\phi} \\
&= \begin{bmatrix} a & iq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ iq \end{bmatrix} e^{2i\delta\phi} = (a^2 - q^2) e^{2i\delta\phi}
\end{aligned}$$

因此

$$L = c_x^2 - s_x^2 + c_y^2 - s_y^2 + 2i(c_x s_x + c_y s_y) = (a^2 - q^2) e^{2i\delta\phi} \quad (1-107)$$

$$(6) \quad M = \mathbf{C}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{C}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c_x + is_x & c_y + is_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x + is_x \\ c_y + is_y \end{bmatrix} \\
&= c_x^2 - s_x^2 - c_y^2 + s_y^2 + 2i(c_x s_x - c_y s_y) \\
& (e^{i\delta\phi})^T \mathbf{z}_0^T (e^{-i\sigma_2\theta})^T \boldsymbol{\sigma}_3 e^{-i\sigma_2\theta} \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} = (e^{i\delta\phi})^T \mathbf{z}_0^T \boldsymbol{\sigma}_3 \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} \\
&= \begin{bmatrix} a & iq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ iq \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & iq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ iq \end{bmatrix} = [(a^2 + q^2) \cos 2\theta - iaq \sin 2\theta] e^{2i\delta\phi}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
M &= c_x^2 - s_x^2 - c_y^2 + s_y^2 + 2i(c_x s_x - c_y s_y) \\
&= [(a^2 + q^2) \cos 2\theta - iaq \sin 2\theta] e^{2i\delta\phi}
\end{aligned} \quad (1-108)$$

$$(7) \quad N = \mathbf{C}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{C}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c_x + is_x & c_y + is_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x + is_x \\ c_y + is_y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_x c_y - s_x s_y + i(s_x c_y + c_x s_y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x c_y - s_x s_y + i(s_x c_y + c_x s_y) \end{bmatrix} \\
&= 2(c_x c_y - s_x s_y) + 2i(s_x c_y + c_x s_y) \\
& \\
& (e^{i\delta\phi})^T \mathbf{z}_0^T (e^{-i\sigma_2\theta})^T \boldsymbol{\sigma}_1 e^{-i\sigma_2\theta} \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} = (e^{i\delta\phi})^T \mathbf{z}_0^T \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} \\
&= \begin{bmatrix} a & iq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ iq \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & iq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ iq \end{bmatrix} = \left[(a^2 - q^2) \sin 2\theta + 2iaq \cos 2\theta \right] e^{i2\delta\phi}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= 2(c_x c_y - s_x s_y) + 2i(s_x c_y + c_x s_y) \\
&= \left[(a^2 - q^2) \sin 2\theta + 2iaq \cos 2\theta \right] e^{i2\delta\phi}
\end{aligned} \tag{1-109}$$

小结

对照第四节，通过对比我们可以建立如下等式

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}_1; \mathbf{Q} = \mathbf{I}_4; \mathbf{R} = \mathbf{I}_2; \mathbf{S} = \mathbf{I}_5; \mathbf{Re}(\mathbf{L}) = \mathbf{I}_3; \mathbf{Im}(\mathbf{L}) = -\mathbf{I}_6$$

1.5.3 正则解参数的演化

我们介绍了稳态解参数（即 c_x 、 s_x 、 c_y 和 s_y ）与正则解参数（即 a 、 q 、 θ 和 $\delta\phi$ ）之间的关系，同时介绍了与这些参数相关的较为重要的五个不变量（即 \mathbf{E} 、 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 、 \mathbf{S} 和 \mathbf{L} ），因此，我们可以根据需要进行不同的参数确定系统的状态，并且实现不同参数间的相互转换。我们已经知道了稳态解参数的动力学方程，而对正则解参数的动力学还不明了，一个自然的思路便是将式(1-101)代入动力学方程(1-93)中，以检查正则解参数的演化规律。首先，基于式(1-101)，我们计算

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{C}} &= -e^{-i\sigma_2\theta} i\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} \dot{\theta} + e^{-i\sigma_2\theta} \dot{\mathbf{z}}_0 e^{i\delta\phi} + ie^{-i\sigma_2\theta} \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} \dot{\delta\phi} \\
&= e^{-i\sigma_2\theta} \left[-i\boldsymbol{\sigma}_2 \dot{\theta} \mathbf{z}_0 + \dot{\mathbf{z}}_0 + i\delta\dot{\phi} \mathbf{z}_0 \right] e^{i\delta\phi}
\end{aligned} \tag{1-110}$$

并将式(1-101)和式(1-110)代入方程(1-93), 可得

$$\begin{aligned} e^{-i\sigma_2\theta} \left[-i\sigma_2\dot{\theta}\mathbf{z}_0 + \dot{\mathbf{z}}_0 + i\delta\dot{\phi}\mathbf{z}_0 \right] e^{i\delta\phi} + \Gamma e^{-i\sigma_2\theta} \mathbf{z}_0 e^{i\delta\phi} &= \frac{i}{2\omega} \mathbf{F} \\ \Rightarrow & \\ \dot{\mathbf{z}}_0 - i\sigma_2\dot{\theta}\mathbf{z}_0 + i\delta\dot{\phi}\mathbf{z}_0 + e^{i\sigma_2\theta} \Gamma e^{-i\sigma_2\theta} \mathbf{z}_0 &= \frac{i}{2\omega} e^{-i\delta\phi} e^{i\sigma_2\theta} \mathbf{F} \end{aligned} \quad (1-111)$$

注意

$$\begin{aligned} e^{i\sigma_2\theta} \Gamma e^{-i\sigma_2\theta} &= \frac{1}{\tau} + e^{i\sigma_2\theta} \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \boldsymbol{\sigma}_3 e^{2i\sigma_2\theta_\tau} e^{-i\sigma_2\theta} \\ &\quad - e^{i\sigma_2\theta} ik\Omega\boldsymbol{\sigma}_2 e^{-i\sigma_2\theta} - i\dot{\phi} - e^{i\sigma_2\theta} \frac{i}{2} \Delta\omega\boldsymbol{\sigma}_3 e^{2i\sigma_2\theta_\omega} e^{-i\sigma_2\theta} \\ &= \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \boldsymbol{\sigma}_3 e^{-2i\sigma_2(\theta-\theta_\tau)} - ik\Omega\boldsymbol{\sigma}_2 - i\dot{\phi} - \frac{i}{2} \Delta\omega\boldsymbol{\sigma}_3 e^{-2i\sigma_2(\theta-\theta_\omega)} \end{aligned} \quad (1-112)$$

其中

$$\begin{aligned} e^{i\sigma_2\theta} \boldsymbol{\sigma}_3 e^{2i\sigma_2\theta_\tau} e^{-i\sigma_2\theta} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta_\tau & \sin 2\theta_\tau \\ -\sin 2\theta_\tau & \cos 2\theta_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta_\tau & \sin 2\theta_\tau \\ \sin 2\theta_\tau & -\cos 2\theta_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2\theta-2\theta_\tau) & -\sin(2\theta-2\theta_\tau) \\ -\sin(2\theta-2\theta_\tau) & -\cos(2\theta-2\theta_\tau) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_3 e^{-2i\sigma_2(\theta-\theta_\tau)} \end{aligned} \quad (1-113)$$

且

$$\begin{aligned} e^{i\sigma_2\theta} \boldsymbol{\sigma}_2 e^{-i\sigma_2\theta} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_2 \end{aligned} \quad (1-114)$$

将式(1-112)代回方程(1-111), 进一步简化并整理为矩阵形式可得

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{z}}_0 - i\sigma_2 \dot{\theta} \mathbf{z}_0 + i\delta \dot{\phi} \mathbf{z}_0 + e^{i\sigma_2 \theta} \Gamma e^{-i\sigma_2 \theta} \mathbf{z}_0 &= \frac{i}{2\omega} e^{-i\delta\phi} e^{i\sigma_2 \theta} \mathbf{F} \\
\Rightarrow \\
\begin{bmatrix} \dot{a} \\ i\dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i(\delta\dot{\phi} - \dot{\phi}) + \frac{1}{\tau} & -\dot{\theta} - k\Omega \\ \dot{\theta} + k\Omega & i(\delta\dot{\phi} - \dot{\phi}) + \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ iq \end{bmatrix} \\
+ \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \begin{bmatrix} \cos 2(\theta - \theta_\tau) & -\sin 2(\theta - \theta_\tau) \\ -\sin 2(\theta - \theta_\tau) & -\cos 2(\theta - \theta_\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ iq \end{bmatrix} \\
- \frac{i}{2} \Delta \omega \begin{bmatrix} \cos 2(\theta - \theta_\omega) & -\sin 2(\theta - \theta_\omega) \\ -\sin 2(\theta - \theta_\omega) & -\cos 2(\theta - \theta_\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ iq \end{bmatrix} \\
= \frac{i}{2\omega} e^{-i\delta\phi} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \frac{i}{2\omega} e^{-i\delta\phi} \begin{bmatrix} F_a \\ F_q \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1-115}$$

注意 $F_x = f_{x_c} + if_{x_s}$, $F_y = f_{y_c} + if_{y_s}$ 为复载荷幅值, F_a 和 F_q 分别为复载荷幅值在谐振椭圆轨道 (注: 以下简称轨道) 的半长轴和半短轴上的投影。从方程组(1-115)中分别列出两个方程 (注意等式两边为复数)

复数方程-1

$$\begin{aligned}
\dot{a} + i(\delta\dot{\phi} - \dot{\phi})a + \frac{1}{\tau}a - iq(\dot{\theta} + k\Omega) \\
+ \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) a \cos 2(\theta - \theta_\tau) - \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) iq \sin 2(\theta - \theta_\tau) \\
- \frac{i}{2} \Delta \omega a \cos 2(\theta - \theta_\omega) + \frac{i}{2} \Delta \omega iq \sin 2(\theta - \theta_\omega) \\
= \frac{i}{2\omega} e^{-i\delta\phi} F_a
\end{aligned} \tag{1-116}$$

复数方程-2

$$\begin{aligned}
i\dot{q} + (\dot{\theta} + k\Omega)a + \left[i(\delta\dot{\phi} - \dot{\phi}) + \frac{1}{\tau} \right] iq + \\
- \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) a \sin 2(\theta - \theta_\tau) - \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) iq \cos 2(\theta - \theta_\tau) \\
+ \frac{i}{2} \Delta \omega a \sin 2(\theta - \theta_\omega) + \frac{i}{2} \Delta \omega iq \cos 2(\theta - \theta_\omega) \\
= \frac{i}{2\omega} e^{-i\delta\phi} F_q
\end{aligned} \tag{1-117}$$

更进一步，对复数方程-1，即方程(1-116)，令方程左右两边的实部和虚部分别相等可以得到两个标量方程

标量方程-1

$$\begin{aligned} \dot{a} + \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \cos 2(\theta - \theta_\tau) \right] a - \frac{1}{2} \Delta \omega q \sin 2(\theta - \theta_\omega) \\ = \operatorname{Re} \left(\frac{i}{2\omega} e^{-i\delta\phi} F_a \right) \end{aligned} \quad (1-118)$$

标量方程-2

$$\begin{aligned} i(\delta\dot{\phi} - \dot{\phi})a - iq(\dot{\theta} + k\Omega) - \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) iq \sin 2(\theta - \theta_\tau) \\ - \frac{i}{2} \Delta \omega a \cos 2(\theta - \theta_\omega) = \operatorname{Im} \left(\frac{i}{2\omega} e^{-i\delta\phi} F_a \right) \\ \Rightarrow \\ \left[\dot{\phi}' + \frac{1}{2} \Delta \omega \cos 2(\theta - \theta_\omega) \right] a + \left[\dot{\theta} + k\Omega + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \sin 2(\theta - \theta_\tau) \right] q \\ = -\operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\omega} e^{-i\delta\phi} F_a \right) \end{aligned} \quad (1-119)$$

同理，从复数方程-2，即方程(1-117)可得出另外两个标量方程

标量方程-3

$$\begin{aligned} \left[\dot{\theta} + k\Omega - \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \sin 2(\theta - \theta_\tau) \right] a + \left[\dot{\phi}' - \frac{1}{2} \Delta \omega \cos 2(\theta - \theta_\omega) \right] q \\ = \operatorname{Re} \left[\frac{i}{2\omega} e^{-i\delta\phi} F_q \right] \end{aligned} \quad (1-120)$$

标量方程-4

$$\begin{aligned} \dot{q} + \frac{1}{2} \Delta \omega \sin 2(\theta - \theta_\omega) a + \left[\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \cos 2(\theta - \theta_\tau) \right] q \\ = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\omega} e^{-i\delta\phi} F_q \right] \end{aligned} \quad (1-121)$$

以上，我们通过繁复的推导（Lynch 报告中省略），得到了 4 个正则解参数的 4 个动力学方程，即四个一阶常微分方程，结果整理如下

$$\begin{cases} \dot{a} + \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \cos 2(\theta - \theta_\tau) \right] a - \frac{1}{2} \Delta \omega \sin 2(\theta - \theta_\omega) q = \operatorname{Re} \left(\frac{i}{2\omega} e^{-i\delta\phi} F_a \right) \\ \dot{q} + \frac{1}{2} \Delta \omega \sin 2(\theta - \theta_\omega) a + \left[\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \cos 2(\theta - \theta_\tau) \right] q = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\omega} e^{-i\delta\phi} F_q \right) \\ \left[\dot{\theta} + k\Omega - \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \sin 2(\theta - \theta_\tau) \right] a + \left[\dot{\phi}' - \frac{1}{2} \Delta \omega \cos 2(\theta - \theta_\omega) \right] q = \operatorname{Re} \left(\frac{i}{2\omega} e^{-i\delta\phi} F_q \right) \\ \left[\dot{\phi}' + \frac{1}{2} \Delta \omega \cos 2(\theta - \theta_\omega) \right] a + \left[\dot{\theta} + k\Omega + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \sin 2(\theta - \theta_\tau) \right] q = -\operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\omega} e^{-i\delta\phi} F_a \right) \end{cases}$$

(1-122)

我们注意到前两个方程分别给出了 a 和 q 的演化方程，结合后两个方程，可以进一步得到

$$\begin{cases} (\dot{\theta} + k\Omega)(a^2 - q^2) - \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \sin 2(\theta - \theta_\tau)(a^2 + q^2) - \frac{1}{2} \Delta \omega \cos 2(\theta - \theta_\omega)(2aq) = \operatorname{Re} \left[\frac{i}{2\omega} e^{-i\delta\phi} (F_q a - iF_a q) \right] \\ \dot{\phi}'(a^2 - q^2) + \frac{1}{2} \Delta \omega \cos 2(\theta - \theta_\omega)(a^2 + q^2) + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \sin 2(\theta - \theta_\tau)(2aq) = -\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\omega} e^{-i\delta\phi} (F_a a + iF_q q) \right] \end{cases}$$

(1-123)

实际中，通过正交抑制回路可以保证 $a^2 \neq q^2$ ，因此，可以进一步得到

$$\begin{cases} \dot{\theta} + k\Omega - \frac{(a^2 + q^2)}{2(a^2 - q^2)} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \sin 2(\theta - \theta_\tau) - \frac{2aq}{2(a^2 - q^2)} \Delta \omega \cos 2(\theta - \theta_\omega) = \operatorname{Re} \left[\frac{i}{2\omega(a^2 - q^2)} e^{-i\delta\phi} (F_q a - iF_a q) \right] \\ \dot{\phi}' + \frac{(a^2 + q^2)}{2(a^2 - q^2)} \Delta \omega \cos 2(\theta - \theta_\omega) + \frac{2aq}{2(a^2 - q^2)} \Delta \left(\frac{1}{\tau} \right) \sin 2(\theta - \theta_\tau) = -\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\omega(a^2 - q^2)} e^{-i\delta\phi} (F_a a + iF_q q) \right] \end{cases}$$

(1-124)

以上是关于正则解参数 a 、 q 、 θ 和 ϕ' 的动力学方程，（从控制论的角度，这些正则解参数也称为状态变量，动力学方程就是状态演化方程）。此外，注意到不变量 E 和 Q 的定义，可知

$$\begin{aligned} E &= a^2 + q^2 \\ Q &= 2aq \\ \sqrt{E^2 - Q^2} &= a^2 - q^2 \end{aligned} \quad (1-125)$$

结合 a 和 q 的演化方程，我们做状态变量的替换，可得

$$\begin{cases} 2\dot{a}a + \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)\cos 2(\theta - \theta_\tau) \right] 2a^2 - \frac{1}{2}\Delta\omega\sin 2(\theta - \theta_\omega) 2aq = \operatorname{Re}\left(\frac{i}{\omega}e^{-i\delta\phi}F_a a\right) \\ 2\dot{q}q + \frac{1}{2}\Delta\omega\sin 2(\theta - \theta_\omega) 2aq + \left[\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)\cos 2(\theta - \theta_\tau) \right] 2q^2 = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\omega}e^{-i\delta\phi}F_q q\right) \end{cases} \\ \Rightarrow \\ \dot{E} + \frac{2}{\tau}E + \left[\Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)\cos 2(\theta - \theta_\tau) \right] \sqrt{E^2 - Q^2} = \operatorname{Re}\left[\frac{i}{\omega}e^{-i\delta\phi}(F_a a - iF_q q)\right] \end{aligned} \quad (1-126)$$

和

$$\begin{cases} \dot{a}q + \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)\cos 2(\theta - \theta_\tau) \right] 2aq - \frac{1}{2}\Delta\omega\sin 2(\theta - \theta_\omega) 2q^2 = \operatorname{Re}\left(\frac{i}{\omega}e^{-i\delta\phi}F_a q\right) \\ \dot{q}a + \frac{1}{2}\Delta\omega\sin 2(\theta - \theta_\omega) 2a^2 + \left[\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)\cos 2(\theta - \theta_\tau) \right] 2qa = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\omega}e^{-i\delta\phi}F_q a\right) \end{cases} \\ \Rightarrow \\ \dot{Q} + \frac{2}{\tau}Q + \Delta\omega\sin 2(\theta - \theta_\omega)\sqrt{E^2 - Q^2} = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\omega}e^{-i\delta\phi}(F_q a + iF_a q)\right] \end{aligned} \quad (1-127)$$

因此，结合上一小节，可以得到四个状态变量 E 、 Q 、 θ 和 ϕ' 的演化方程，整理如下

$$\begin{cases} \dot{E} = -\frac{2}{\tau}E - \Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)\cos 2(\theta - \theta_\tau)\sqrt{E^2 - Q^2} + \operatorname{Re}\left[\frac{i}{\omega}e^{-i\delta\phi}(F_a a - iF_q q)\right] \\ \dot{Q} = -\frac{2}{\tau}Q - \Delta\omega\sin 2(\theta - \theta_\omega)\sqrt{E^2 - Q^2} + \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\omega}e^{-i\delta\phi}(F_q a + iF_a q)\right] \\ \dot{\theta} = -k\Omega + \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)\sin 2(\theta - \theta_\tau)\frac{E}{\sqrt{E^2 - Q^2}} + \frac{1}{2}\Delta\omega\cos 2(\theta - \theta_\omega)\frac{Q}{\sqrt{E^2 - Q^2}} + \operatorname{Re}\left[\frac{i}{2\omega}e^{-i\delta\phi}\frac{(F_q a - iF_a q)}{\sqrt{E^2 - Q^2}}\right] \\ \dot{\phi}' = -\frac{1}{2}\Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)\sin 2(\theta - \theta_\tau)\frac{Q}{\sqrt{E^2 - Q^2}} - \frac{1}{2}\Delta\omega\cos 2(\theta - \theta_\omega)\frac{E}{\sqrt{E^2 - Q^2}} - \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\omega}e^{-i\delta\phi}\frac{(F_a a + iF_q q)}{\sqrt{E^2 - Q^2}}\right] \end{cases}$$

$$(1-128)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2}(E + \sqrt{E^2 - Q^2})} \\ q &= \sqrt{\frac{1}{2}(E - \sqrt{E^2 - Q^2})} \end{aligned} \quad (1-129)$$

1.5.4 Lynch 陀螺的 PI 控制

给出正则解参数演化方程的意义在于建立状态变量和载荷之间的关系，以便于解决控制问题。控制问题首先需要考虑的是控制目标，对于 Lynch 陀螺，控制目标为：

- (1) 幅值控制：使轨迹的半长轴长度 a 等于给定值，也称为能量调节。
- (2) 正交控制：使轨迹的半短轴长度 q 为零，也称为正交抑制。
- (3) 锁相控制：使稳态等效参考信号的初始相位 ϕ 跟踪轨迹的初始相位 ϕ' 。

对于工作在力平衡模式的陀螺还需要考虑力平衡控制

- (4) 力平衡控制：使轨迹的进动为零，也称进动抑制。
- (5) 全角控制：跟踪轨迹的进动。

其中，(4) 和 (5) 需根据陀螺的工作模式二选其一，分别称为力平衡陀螺和全角陀螺。

针对以上控制目标，结合状态变量及其演化方程，可以采用反馈的方式实现控制。反馈的前提是对状态变量实现有效的检测，一般的方式是通过稳态解参数（即 c_x 、 s_x 、 c_y 和 s_y ）的解调测量，再经过运算估计选定的状态变量的值，运算中采用了前面介绍的不变量公式：

- (1) 能量调节 (Energy control)

$$E = a^2 + q^2 = c_x^2 + s_x^2 + c_y^2 + s_y^2 \quad (1-130)$$

(2) 正交抑制 (Quadrature control)

$$Q = 2aq = 2(c_x s_y - c_y s_x) \quad (1-131)$$

(3) 锁相跟踪 (Locking phase control)

$$\text{Im}(L) = (a^2 - q^2) \sin 2\delta\phi = 2(c_x s_x + c_y s_y) \quad (1-132)$$

(4) 进动抑制 (pRoceSsion control)

$$S = (a^2 - q^2) \sin 2\theta = 2(c_x c_y + s_x s_y) \quad (1-133)$$

(5) 进动角估计

$$R = c_x^2 + s_x^2 - c_y^2 - s_y^2 = (a^2 - q^2) \cos 2\theta \quad (1-134)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{S}{R}\right) \quad (1-135)$$

(6) 相位差估计

$$\tan 2\delta\phi = \frac{\text{Im}(L)}{\text{Re}(L)} = \frac{2(c_x s_x + c_y s_y)}{c_x^2 - s_x^2 + c_y^2 - s_y^2} \quad (1-136)$$

进一步需要考虑控制律，即如何依据控制目标与测量反馈的差异施加载荷以达到控制目标，这依赖于状态变量在外载荷作用下的演化方程。基于正交抑制条件（即 $Q \ll E$ ， $q \ll 1$ ）和缓慢变量条件（ $\delta\phi = \phi - \phi' \ll 1$ ），方程(1-128)可以近似为

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -\frac{2}{\tau} E - \Delta \left(\frac{1}{\tau}\right) \cos 2(\theta - \theta_\tau) E - \frac{f_{as} \sqrt{E}}{\omega} \\ \dot{Q} &= -\frac{2}{\tau} Q - \Delta \omega \sin 2(\theta - \theta_\omega) E + \frac{f_{qc} \sqrt{E}}{\omega} \\ \dot{\theta} &= -k\Omega + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau}\right) \sin 2(\theta - \theta_\tau) + \frac{1}{2} \Delta \omega \cos 2(\theta - \theta_\omega) \frac{Q}{E} - \frac{f_{qs}}{2\omega\sqrt{E}} \\ \delta\dot{\phi} &= \dot{\phi} + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\tau}\right) \sin 2(\theta - \theta_\tau) \frac{Q}{E} + \frac{1}{2} \Delta \omega \cos 2(\theta - \theta_\omega) + \frac{f_{ac}}{2\omega\sqrt{E}} \end{aligned} \quad (1-137)$$

其中用到了如下关系

$$\begin{aligned}
f_{ac} &= \operatorname{Re}(F_a) = f_{x_c} \cos \theta + f_{y_c} \sin \theta \\
f_{as} &= \operatorname{Im}(F_a) = f_{x_s} \cos \theta + f_{y_s} \sin \theta \\
f_{qc} &= \operatorname{Re}(F_q) = -f_{x_c} \sin \theta + f_{y_c} \cos \theta \\
f_{qs} &= \operatorname{Im}(F_q) = -f_{x_s} \sin \theta + f_{y_s} \cos \theta
\end{aligned} \tag{1-138}$$

演化方程本质上是非线性的，从中我们看到了刚度轴偏转、阻尼轴偏转、频率差和阻尼差等对状态变量的影响，因此，在理想的控制律中中需要根据演化方程采用非线性补偿设计。在 Lynch 的报告中，为了简便，给出了实用的 PI 控制律，并令 $f_{ac} \equiv 0$

$$\begin{aligned}
f_{as} &= K_E \left[E - E_0 + \frac{1}{2\tau_E} \int_0^t (E(t') - E_0) dt' \right] \\
f_{qc} &= -K_Q \left[Q - Q_0 + \frac{1}{2\tau_Q} \int_0^t (Q(t') - Q_0) dt' \right] \\
f_{qs} &= K_S \left[S - S_0 + \frac{1}{2\tau_S} \int_0^t (S(t') - S_0) dt' \right] \\
\dot{\phi} &= -K_L \left[\operatorname{Im}(L) - L_0 + \frac{1}{2\tau_L} \int_0^t (\operatorname{Im}(L(t')) - L_0) dt' \right]
\end{aligned} \tag{1-139}$$

其中， E_0 、 Q_0 、 S_0 和 L_0 为设定的控制目标量， E 、 Q 、 S 和 $\operatorname{Im}(L)$ 为测量反馈量， K_E 、 K_Q 、 K_S 和 K_L 为比例增益， τ_E 、 τ_Q 、 τ_S 和 τ_L 为积分补偿时间。以上的控制律同时适用于力平衡模式和全角模式，但对于全角模式，不需要对状态量 s 进行控制。值得注意的是，当沿轨迹半长轴和半短轴无法施加载荷时，由式(1-138)可得

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f_{x_c} \\ f_{y_c} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ac} \\ f_{qc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} f_{qc} \\
\begin{bmatrix} f_{x_s} \\ f_{y_s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{as} \\ f_{qs} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1-140}$$

据此，可以计算在驱动轴上的等效载荷。

1.6 本章小结

在这一章中，我们循序渐进地从微阻尼单自由度谐振系统开始介绍振动式陀螺动力学中涉及的基本概念，而后研究了科氏力和离心力作用下的双自由度谐振系统，探究了离心力对力平衡模式陀螺有效量程的限制及原因，探究了科氏力和离心力作用下系统的正则运动，以及系统动力学方程稳态解参数和正则解参数之间的关系，在此基础上，采用矩阵记法和矩阵运算重新诠释了 **Lynch** 平均法，并证明了恒定转速下离心力项对动力学方程正则解形式无影响，最后介绍了 **Lynch** 通用振动式陀螺动力学系统的控制律，力求在有限的篇幅里尽量详细地介绍振动式陀螺动力学及其在振动式陀螺控制中的应用。

第 2 章 MEMS 多环陀螺数值模拟技术

2.1 结构参数化建模技术

多环结构具有全对称性、良好的可加工性、良好的可控性和被证明的良好性能，因此被选作 MEMS 振动式陀螺的检测质量块。在这一节中，我们介绍如何对多环结构进行参数化建模，参数化建模的意义在于为后续多环结构的动力学分析研究奠定基础，例如，为有限元分析提供网格依据等。为了研究的方便，我们采用商业有限元前处理软件 ABAQUS/CAE 进行参数化建模，通过编写 Python 脚本实现多环结构的参数化，见图-2。

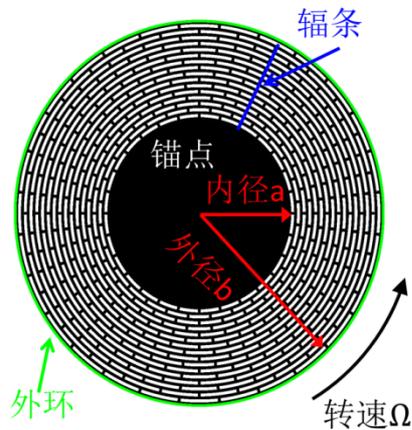


图-2 多环结构

在进行参数化建模之前，首先我们需要对建模中涉及的几何和物理量纲进行约定：

- (1) 长度：微米 (μm)
- (2) 时间：毫秒 (ms)

(3) 质量：微克 (μg)

(4) 电压：毫伏 (mV)

(5) 密度：微克每立方微米 ($\mu\text{g}/\mu\text{m}^3$)，与标准国际单位制的转换

$$1\text{kg}/\text{m}^3 = 10^9 \mu\text{g}/10^{18} \mu\text{m}^3 = 10^{-9} \mu\text{g}/\mu\text{m}^3 \quad (2-1)$$

(6) 力：纳牛 (nN)

$$\begin{aligned} 1\text{N} &= 1\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = 10^9 \mu\text{g} \cdot 10^6 \mu\text{m} / (10^3 \text{ms})^2 \\ &= 10^9 \mu\text{g} \cdot \mu\text{m} / \text{ms}^2 \\ &= 10^9 \text{nN} \end{aligned} \quad (2-2)$$

(7) 应力：千帕 (KPa)

$$1\text{Pa} = 1\text{N}/\text{m}^2 = 10^9 \text{nN}/10^{12} \mu\text{m}^2 = 10^{-3} \text{nN}/\mu\text{m}^2 \quad (2-3)$$

(8) 电容：纳法 (nF)

$$\begin{aligned} \text{N} &\sim \varepsilon \cdot \text{V}^2 \sim 10^6 \text{F}/\text{m} \cdot \text{mv}^2 \sim \text{F}/\mu\text{m} \cdot \text{mv}^2 \\ \Rightarrow \\ \text{nN} &\sim 10^{-9} \text{N} \sim 10^{-9} \text{F}/\mu\text{m} \cdot \text{mv}^2 \sim \text{nF}/\mu\text{m} \cdot \text{mv}^2 \end{aligned} \quad (2-4)$$

陀螺材料默认采用各向同性硅材料，材料行为近似为线弹性，有如下材料参数：

(1) 杨氏模量： $E = 190 \times 10^6 \text{KPa}$

(2) 泊松比： $\nu = 0.278$

(3) 密度： $\rho = 2.3 \times 10^{-6} \mu\text{g}/\mu\text{m}^3$

(4) 真空介电常数： $\varepsilon = 8.864 \times 10^{-9} \text{nF}/\mu\text{m}$

(5) 剪切模量： $\mu = E/2(1+\nu) = 74.34 \text{KPa}$

(6) 体积模量： $\kappa = \nu E/(1-\nu^2) = 57.24 \text{KPa}$

在结构设计中，主要考虑了多环结构的以下几何特征，并进行了参数化：

- (1) 多环外径: b
- (2) 多环内径: a
- (3) 环数: n_{Ring}
- (4) 辐条数: n_{Spoke}
- (5) 环/辐条宽度: $d_{\text{Ring}}, d_{\text{Spoke}}$

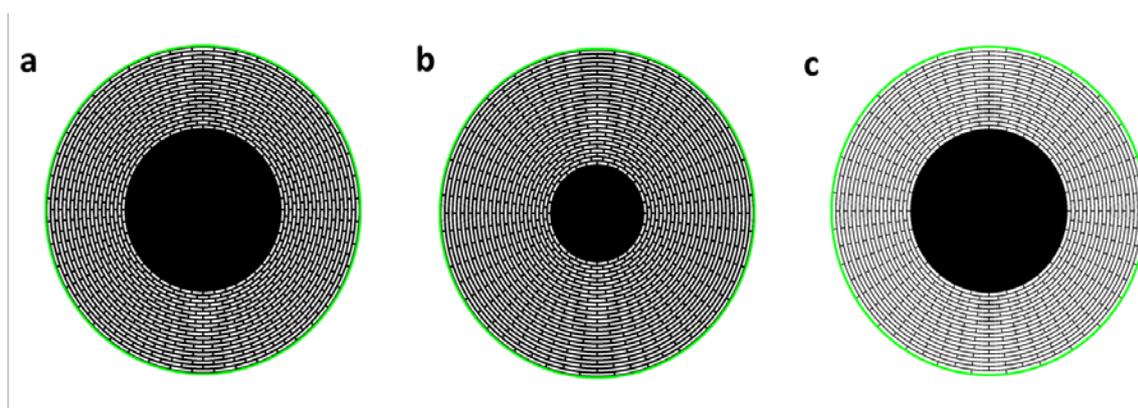


图-3 相对于图-2 中的设计, (a) 增加了辐条数 (b) 增加了环数 (外环半径不变) (c) 减小了环/辐条宽度。

2.2 基于有限元法的旋转结构模态分析

在结构参数化建模的基础上, 为了对具有不同结构参数的多环结构进行模态分析和特征频率计算, 同时研究转速对多环结构模态特征的影响, 我们基于 Matlab 开发了基于有限元法的结构模态分析程序。

2.2.1 有限元法

由于多环陀螺的厚度相对较小, 采用平面应力状态假设; 由于硅材料行为近似为线弹性, 采用胡克应力-应变假设。我们以多环陀螺的中心为原点建立笛卡尔坐标系 (x_1, x_2) , 并设位移场矢量为

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

则应变场矢量为

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

应力场矢量为

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2-7)$$

从弹性理论知，当略去体力时，平衡方程的强形式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}} = \rho \mathbf{a} \quad (2-8)$$

注意，其中 \mathbf{a} 为加速度矢量， $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量。我们考虑采用有限元法求解方程(2-8)，

因此，由虚功原理导出其对应的弱形式为

$$\int_V \rho \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = 0 \quad (2-9)$$

其中 $\delta \mathbf{u}$ 为任意的虚位移场矢量， $\delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为由其导出的虚应变场矢量。为了计算的准确，

我们采用具有二阶精度的 8 节点奇异单元，见图-4

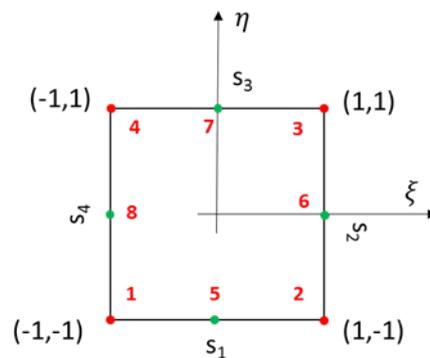


图-4 二阶 8 节点奇异单元

单元的形状函数为

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta) \\
\varphi_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta) \\
\varphi_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta) \\
\varphi_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) \\
\varphi_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
\varphi_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi^2)(1-\eta) \\
\varphi_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\
\varphi_8 &= \frac{1}{2}(1+\xi^2)(1+\eta)
\end{aligned} \tag{2-10}$$

因此，在单元内，对位移场矢量的分量可以通过插值得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \sum_{N=1}^8 \varphi_N(\xi, \eta) \mathbf{u}_1^N \\
\mathbf{u}_2 &= \sum_{N=1}^8 \varphi_N(\xi, \eta) \mathbf{u}_2^N
\end{aligned} \tag{2-11}$$

为了在计算中使用矩阵运算，我们定义如下矩阵

$$\mathbf{N}^N = \begin{bmatrix} \varphi_N & 0 \\ 0 & \varphi_N \end{bmatrix}, N=1, 2, \dots, 8 \tag{2-12}$$

因此，我们有如下单元内位移场关于节点位移插值的矩阵关系

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^1 & \mathbf{N}^2 & \dots & \mathbf{N}^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^1 \\ \mathbf{u}_2^1 \\ \mathbf{u}_1^2 \\ \mathbf{u}_2^2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_1^8 \\ \mathbf{u}_2^8 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}_e \tag{2-13}$$

其中， \mathbf{u}_e 为节点位移矢量， \mathbf{N} 为位移矩阵。更进一步，为了使用等参单元技术，类似的，对坐标矢量场进行插值，我们得到

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^1 & \mathbf{N}^2 & \dots & \mathbf{N}^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \\ X_1^2 \\ X_2^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_1^8 \\ X_2^8 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{X}_e \quad (2-14)$$

其中， \mathbf{X}_e 为节点坐标矢量。

为了计算与位移场梯度有关的应变场，我们计算形状函数的导数，并整理为以下矩阵形式

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_5}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_5}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_6}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_6}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_7}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_7}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_8}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi+\eta) & \frac{1}{4}(1-\xi)(\xi+2\eta) \\ \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta) & \frac{1}{4}(1+\xi)(-\xi+2\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta) & \frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi-\eta) & \frac{1}{4}(1-\xi)(-\xi+2\eta) \\ -\xi(1-\eta) & -\frac{1}{2}(1-\xi^2) \\ \frac{1}{2}(1-\eta^2) & -(1+\xi)\eta \\ -\xi(1-\eta) & \frac{1}{2}(1-\xi^2) \\ -\frac{1}{2}(1-\eta^2) & -\eta(1-\xi) \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

在此基础上，我们可以进一步计算雅克比矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} X_1^1 & X_2^1 & \dots & X_1^8 \\ X_2^1 & X_2^2 & \dots & X_2^8 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H} \quad (2-16)$$

和梯度矩阵

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{J}^{-1} \quad (2-17)$$

为了在计算中使用矩阵运算，我们定义如下矩阵

$$\mathbf{B}^N = \begin{bmatrix} \Gamma_{N1} & 0 \\ 0 & \Gamma_{N2} \\ \Gamma_{N2} & \Gamma_{N1} \end{bmatrix}, N=1,2,\dots,8 \quad (2-18)$$

因此，我们可以计算应变场矢量为

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^1 & \mathbf{B}^2 & \dots & \mathbf{B}^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^1 \\ \mathbf{u}_2^1 \\ \mathbf{u}_1^2 \\ \mathbf{u}_2^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{u}_1^8 \\ \mathbf{u}_2^8 \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{u}_e \quad (2-19)$$

其中， \mathbf{B} 为应变矩阵。

我们现在考虑加速度的计算，并将旋转效应纳入其中，我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2) - 2\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{u}}_2 - \boldsymbol{\Omega}^2(\mathbf{X}_1 + \mathbf{u}_1) \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{u}_1) + 2\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{u}}_1 - \boldsymbol{\Omega}^2(\mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2) \end{bmatrix} \\ &= \ddot{\mathbf{u}} + 2\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{R} \cdot \mathbf{u} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{R} \cdot \mathbf{X} - \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2-20)$$

其中

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

至此，我们将式(2-13)、(2-14)、(2-19)和(2-20)代入方程(2-9)中，可以得到

$$\begin{aligned} &\int_V \rho \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{u}}_e + \int_V 2\rho \boldsymbol{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{N} dV \dot{\mathbf{u}}_e \\ &+ \int_V \rho \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{N} dV \mathbf{u}_e + \int_V \rho \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{X}_e dV \\ &- \int_V \rho \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} dV \mathbf{u}_e - \int_V \rho \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{X}_e dV \\ &+ \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} dV \cdot \mathbf{u}_e = 0 \end{aligned} \quad (2-22)$$

或整理为如下形式

$$\mathbf{M}_\rho \cdot \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{C}_\Omega \cdot \dot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_\Omega \cdot \mathbf{u}_e + \mathbf{K}_{\Omega^2} \cdot \mathbf{u}_e + \mathbf{K}_\varepsilon \cdot \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_\Omega + \mathbf{f}_{\Omega^2} \quad (2-23)$$

其中

$$\mathbf{M}_\rho = \int_V \rho \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} dV \quad (2-24)$$

$$\mathbf{C}_\Omega = \int_V 2\rho \Omega \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{N} dV \quad (2-25)$$

$$\mathbf{K}_\dot{\Omega} = \int_V \rho \dot{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{N} dV \quad (2-26)$$

$$\mathbf{K}_{\Omega^2} = -\int_V \rho \Omega^2 \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} dV \quad (2-27)$$

$$\mathbf{K}_\varepsilon = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} dV \quad (2-28)$$

$$\mathbf{f}_\dot{\Omega} = -\int_V \rho \dot{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{X}_e dV \quad (2-29)$$

$$\mathbf{f}_{\Omega^2} = \int_V \rho \Omega^2 \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{X}_e dV \quad (2-30)$$

进一步的简化记法为

$$\mathbf{M}_\rho \cdot \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{C}_\Omega \cdot \dot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e \quad (2-31)$$

其中

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_{\dot{\Omega}} + \mathbf{K}_{\Omega^2} + \mathbf{K}_\varepsilon \quad (2-32)$$

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_{\dot{\Omega}} + \mathbf{f}_{\Omega^2} \quad (2-33)$$

小结

在这一小节，我们提出了可以描述旋转效应的平面应力有限元法的公式，在单元层面建立了平衡方程的离散形式，通过标准化的有限元组装过程，可以建立结构总体层面平衡方程的离散形式，为后续的结构模态分析奠定基础。

2.2.2 结构模态分析算法

这一小节将介绍我们提出的结构模态分析算法。在 2.2.1 节的基础上，我们考虑结构总体层面平衡方程的离散形式

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2-34)$$

基于此求解恒定转速下的结构模态，因此，在组装的过程中，略去单元方程方程(2-31)中的角加速度项 $\dot{\Omega}$ 和外力项 \mathbf{f}_e 。

假设解的形式为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c \cos(\omega t) + \mathbf{u}_s \sin(\omega t) \quad (2-35)$$

将其代入方程(2-34)，可得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & \omega \mathbf{C} \\ -\omega \mathbf{C} & \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ & \Rightarrow \\ & \bar{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2-36)$$

因此，方程(2-36)非平凡解的存在要求矩阵 $\bar{\mathbf{K}}$ 的行列式为零，即

$$|\bar{\mathbf{K}}| = 0 \quad (2-37)$$

方程(2-37)的解 ω_n 称为结构的自然频率，对应的 $\bar{\mathbf{u}}$ 称为结构的模态向量。

尽管以上介绍的方法从理论上很好理解，但在实际计算中却很困难，尤其当矩阵 $\bar{\mathbf{K}}$ 的阶数很大时，计算甚至是不可能的，因此，必须考虑其他的方法进行计算，我们提出以下算法：

(1) 第一步，我们令

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \quad (2-38)$$

因此，由方程(2-34)，我们可以得到

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{s}} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{K} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{s} = 0 \\
& \Rightarrow \\
& \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{s} = 0 \\
& \Rightarrow \\
& \dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{s} \\
& \Rightarrow \\
& \dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}
\end{aligned} \tag{2-39}$$

其中， \mathbf{I} 是单位矩阵，其阶数等于系统自由度数，即 \mathbf{u} 的维数。

(2) 第二步，我们令

$$\mathbf{s} = \xi e^{-\lambda t} \tag{2-40}$$

并将其代入方程(2-39)，得到

$$\mathbf{A} \cdot \xi = \lambda \xi \tag{2-41}$$

注意到，方程(2-41)对应典型的特征值问题。此时，我们已经将求解高阶矩阵行列式的特征多项式问题，即求解方程(2-37)，转换为了求解标准的特征值问题。

(3) 第三步，我们进一步采用 Lanczos 算法、带位移-QL 算法等高效的特征值算法对方程(2-41)进行求解。

(4) 第四步，从解得的 λ 和 ξ 计算自然频率 ω_n 和模态向量 $\bar{\mathbf{u}}$ 。注意到从方程(2-41)解得的 λ 和 ξ 都是复数或复数向量，且以共轭对的形式出现，即若特征值 λ 和其对应的特征向量 ξ 使方程(2-41)成立，则其共轭对 $\tilde{\lambda}$ 和 $\tilde{\xi}$ 也是方程的解，即有如下关系

$$\begin{aligned}
& (\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\xi}) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\xi} = \mathbf{A}\xi \\
& (\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\xi}) = (\tilde{\lambda}\tilde{\xi}) = \tilde{\lambda}\tilde{\xi} \\
& \Rightarrow \\
& \mathbf{A}\xi = \tilde{\lambda}\tilde{\xi}
\end{aligned} \tag{2-42}$$

因此，我们可知 $\omega_n = \text{Im}(\lambda) = \text{Im}(\tilde{\lambda})$ 。若令

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha + i\omega_n \\ \tilde{\lambda} &= \alpha - i\omega_n\end{aligned}\quad (2-43)$$

由模态叠加可知, 对应于自然频率 ω_n , 我们可以从如下的特征向量中求得模态信息

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= \xi e^{\alpha t} e^{i\omega_n t} + \tilde{\xi} e^{\alpha t} e^{-i\omega_n t} \\ &= [\operatorname{Re}(\xi) + i \operatorname{Im}(\xi)] (\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t) e^{\alpha t} \\ &\quad + [\operatorname{Re}(\xi) - i \operatorname{Im}(\xi)] (\cos \omega_n t - i \sin \omega_n t) e^{\alpha t} \\ &= 2[\operatorname{Re}(\xi) \cos \omega_n t - \operatorname{Im}(\xi) \sin \omega_n t] e^{\alpha t}\end{aligned}\quad (2-44)$$

参照方程(2-35)和定义(2-38), 可以很快地计算得到模态向量 $\bar{\mathbf{u}}$ 。

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_c &= 2e^{\alpha t} \operatorname{Re}(\bar{\xi}) \\ \mathbf{u}_s &= -2e^{\alpha t} \operatorname{Im}(\bar{\xi}) \\ \Rightarrow \\ \bar{\mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{\alpha t} \operatorname{Re}(\bar{\xi}) \\ -2e^{\alpha t} \operatorname{Im}(\bar{\xi}) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2-45)$$

其中, $\bar{\xi}$ 为 ξ 的前一半元素构成的向量。

将式(2-45)代入式(2-35), 可得对应于自然频率 ω_n 的模态为

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= 2e^{\alpha t} \operatorname{Re}(\bar{\xi}) \cos(\omega_n t) - 2e^{\alpha t} \operatorname{Im}(\bar{\xi}) \sin(\omega_n t) \\ &= 2e^{\alpha t} \sqrt{\operatorname{Re}(\bar{\xi})^2 + \operatorname{Im}(\bar{\xi})^2} \cos[\omega_n t + \phi(\bar{\xi})]\end{aligned}\quad (2-46)$$

其中, $\phi(\bar{\xi}) = \arctan[\operatorname{Im}(\bar{\xi})/\operatorname{Re}(\bar{\xi})]$ (注: $\bar{\xi}$ 为向量, 所有运算为逐元素计算)。据此, 我们可以得到初始时刻的模态形状为

$$\mathbf{u}_0 = 2e^{\alpha t} \sqrt{\operatorname{Re}(\bar{\xi})^2 + \operatorname{Im}(\bar{\xi})^2} \cos[\phi(\bar{\xi})]\quad (2-47)$$

此外, 值得注意的是, 由于方程中(2-34)速度项的存在, 模态不再视为驻波, 而是行波, 即式(2-46)显含时间变量。

小结

在这一小节，我们提出了一种高效的结构模态分析算法，该算法可用于研究不同转速对结构自然频率和模态的影响，（注：传统的解析方法无法揭示这类关系），这为研究依赖于结构模态或谐振进行工作的多环陀螺奠定了基础。

2.3 高转速下多环结构的模态稳定性分析

在这一小节，我们将利用前面介绍的参数化建模技术和转动结构模态分析技术，对高转速下多环结构的模态稳定性进行分析，并讨论基于多环结构实现全角模式陀螺的局限性。

2.3.1 转动结构模态稳定性的概念

对于静止的轴对称平面结构，常用极坐标 (r, θ) 描述，而结构的不同模态常用沿着径向 r 的波数（记为 m ）和沿着环向 θ 的波数（记为 n ）进行区分，通常情况下，按自然频率由小到大进行排列，径向波数 $m=0$ ，而环向 $n \geq 0$ 的模态通常排在前面，即更易被低频率周期载荷激发。例如，对于一个多环结构，我们列出其前5阶模态，如图-5

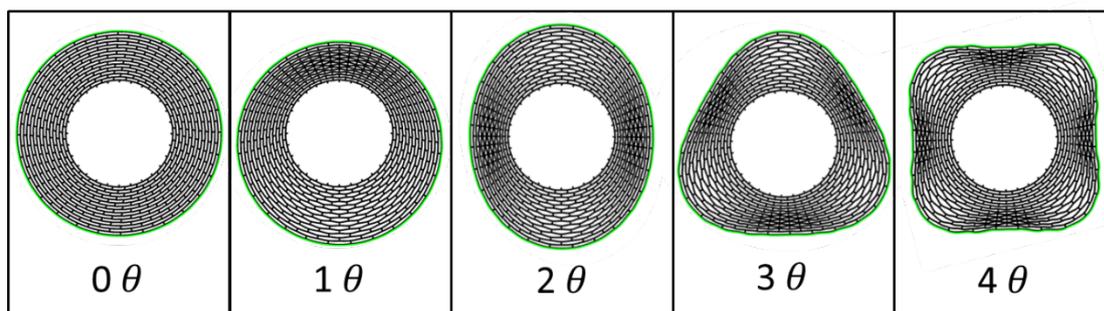


图-5 多环结构前5阶模态图

当我们考虑结构转动时，我们发现相同结构模态的自然频率不仅会随着转速的变化而变化，而且自然频率还会出现分岔现象，此时出现了一个与转动方向同向的前向波，和一个与转动方向反向的后向波，如图-6所示

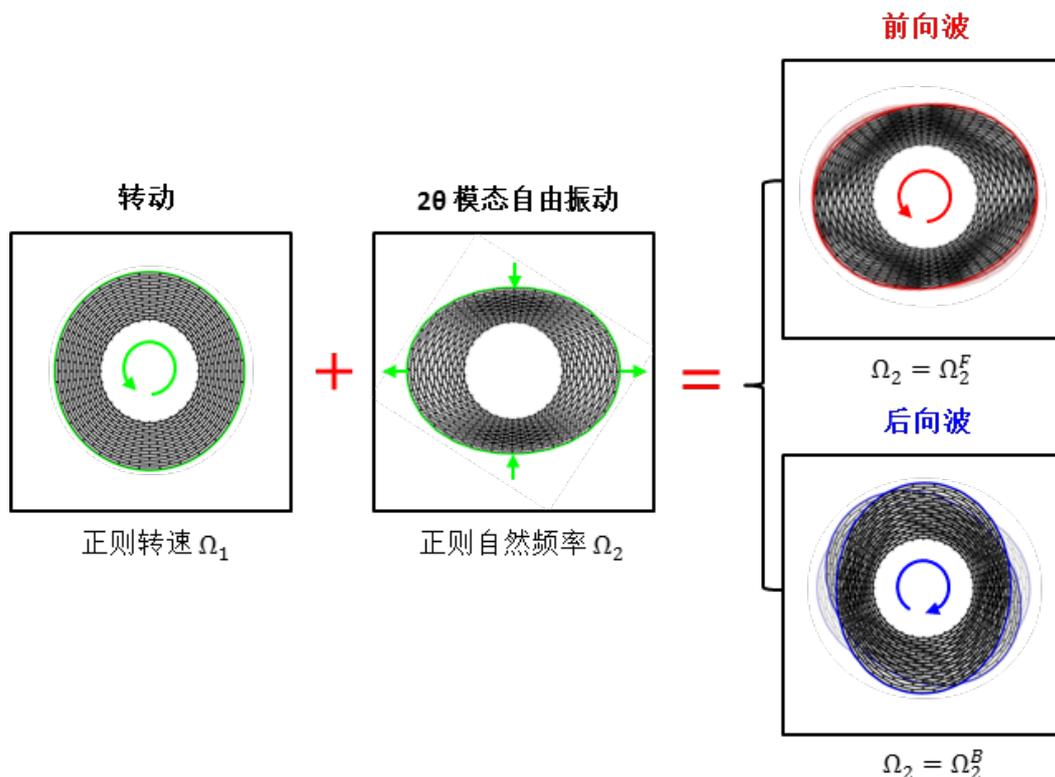


图-6 转动下的模态分岔现象

在图-6 和后续讨论中，为了比较的方便，我们尽量使用无量纲的量，因此引入了正则转速和正则自然频率，定义如下：

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{\Omega}{c} b \\ \Omega_2 &= \frac{\omega_n}{c} b\end{aligned}\tag{2-48}$$

其中 $c = \sqrt{(2\mu + \kappa)/\rho}$ 为压缩波速。更进一步，通过计算，我们可以画出不同正则转速下的正则自然频率图，这也被称为 Campbell 图，如图-7 (a)。

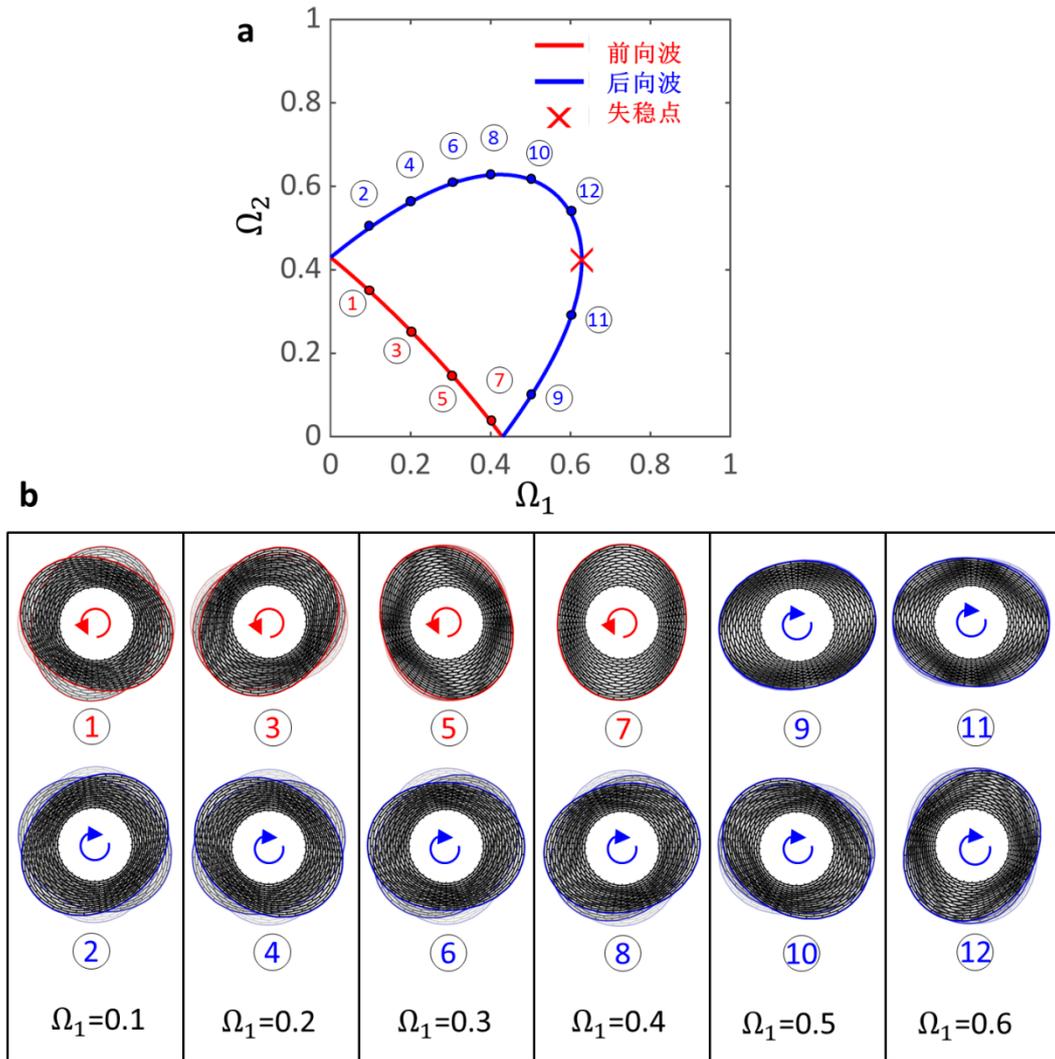


图-7 (a) 2- θ 模态的 Campell 图 (b) 模态波动阴影图

在图-7 (a) (b) 中，我们分别用红色和蓝色标识前向波和后向波。值得注意的是，我们发现，当转速超过一定值时，将没有对应的自然频率出现，称此时的转速达到动态失稳点，其物理意义是超过动态失稳点，相应的模态将无法由外载荷激发，在发动机转子动力学中，这个点也被称为颤振点。此外，我们注意到图-7 (a) 中，Campell 曲线与横坐标轴有一个交点，此时对应的自然频率为零，物理上可以理解为此时结构的刚度为零，结构模态容易受到外载荷的干扰，这个点也被称为临界点。

小结

在这一小节，我们主要介绍了转动结构模态稳定性的概念，在全角陀螺设计中，我们希望工作模态的谐振频率是不随转速变化而变化的，然而这只是理想情况。因此，在设计中，我们不能忽视这一点，而 **Campell** 图绘制的意义在于可以由转速造成的谐振频差的补偿控制设计提供依据。对于采用硅材料 $c = 9.46 \times 10^3 \text{ m/s}$ 和外径约 $b = 0.01 \text{ m}$ 的多环结构，图-7 (a) 中给出的失稳转速约为

$$\Omega_{\text{失稳}} \approx 0.6c/b \approx 5.7 \times 10^5 \text{ rad/s} \approx 9 \times 10^4 \text{ r/s (Hz)}$$

临界转速约为

$$\Omega_{\text{临界}} \approx 0.4c/b \approx 3.8 \times 10^5 \text{ rad/s} \approx 6 \times 10^4 \text{ r/s (Hz)}$$

且图中看出临界转速与静态自然频率很接近。我们注意到，采用大模量、低密度材料和缩小结构尺寸可以显著提高失稳转速和临界转速。此时，我们可以近似认为，若结构转速相比于失稳转速或临界转速足够小（注：粗略比较时，也可以采用转速与静态自然频率之比），由转速引起的谐振频差是一个小量，可以忽略。因此，设计全角陀螺时，应尽量提高谐振频率。

2.3.2 多环结构模态稳定性分析

在这一小节，我们主要展示不同结构参数对多环结构模态稳定性的影响的研究成果，主要的结构因素包括：环数、辐条数和空隙率（即环间距和环宽之比）。在这些分析中，我们默认辐条宽度和环宽度相同。

我们首先看不同辐条数下的计算结果。不同辐条数的多环结构图如图-8 所示，计算结果如图-9 所示

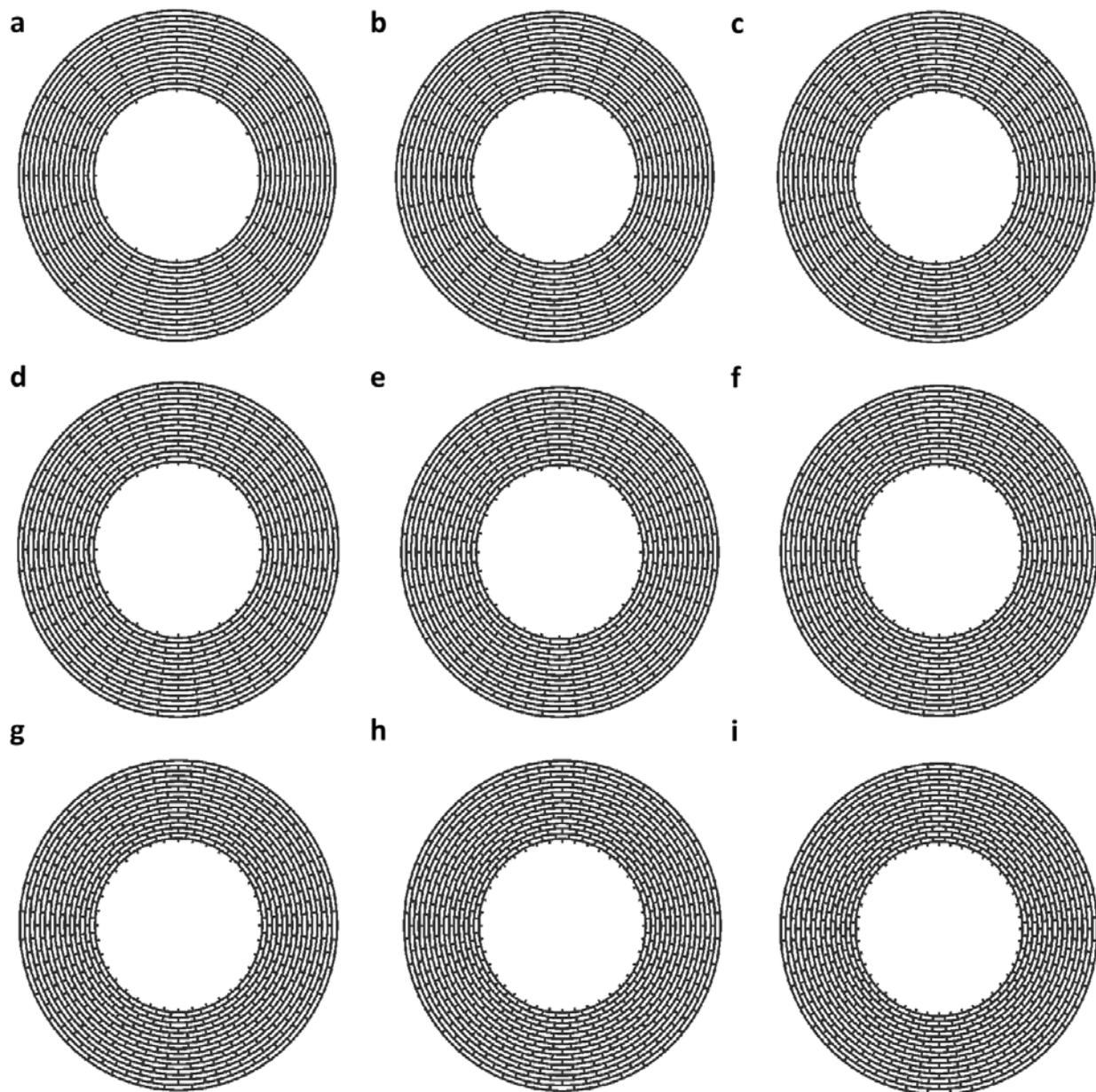


图-8 结构示意图。辐条数分别为 a 24, b 32, c 40, d 48, e 56, f 64, g 72, h 80, i 88. 结构环数相同 16, 孔隙率 0.5, 和内外径比 0.5

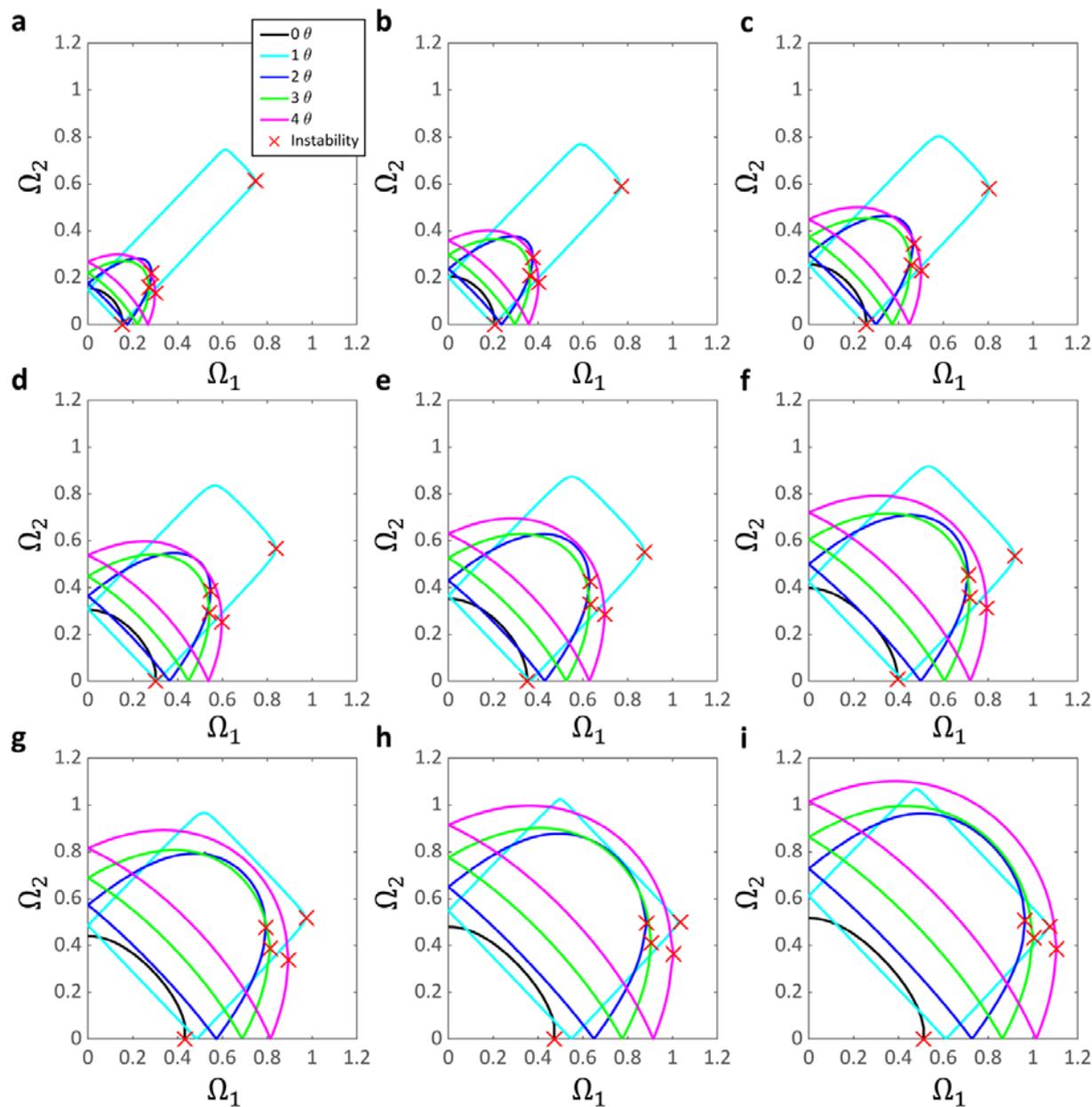


图-9 Campbell 图。辐条数分别为 a 24, b 32, c 40, d 48, e 56, f 64, g 72, h 80, i 88。结构环数相同 16，孔隙率 0.5，和内外径比 0.5

我们再看不同环数下的计算结果。不同环数的多环结构图如图-10 所示，计算结果如图-11 所示。

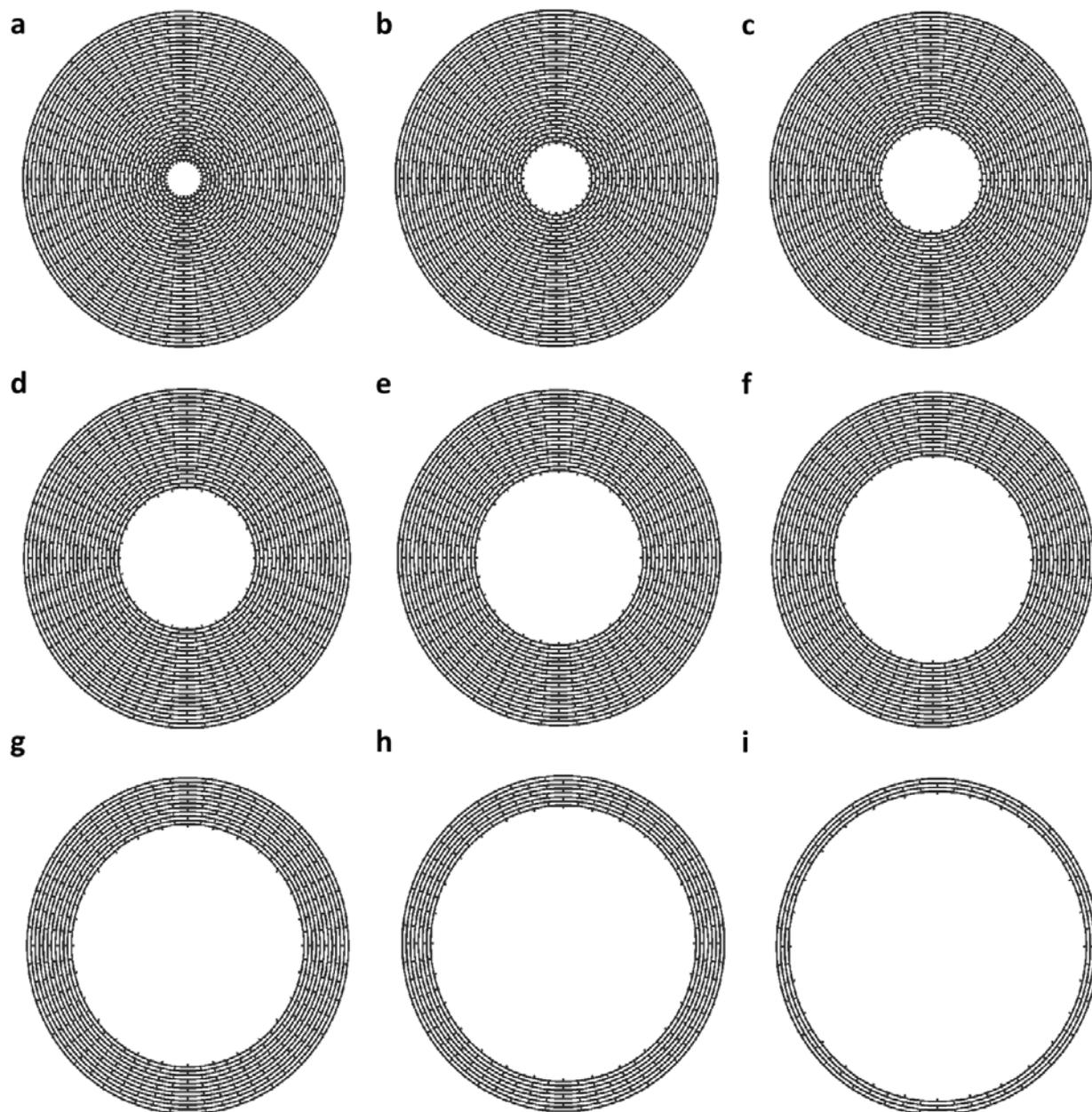


图-10 结构示意图。环数分别为 a 36, b 32, c 28, d 24, e 20, f 16, g 12, h 8, i 4. 结构辐条数相同 56, 孔隙率 0.5

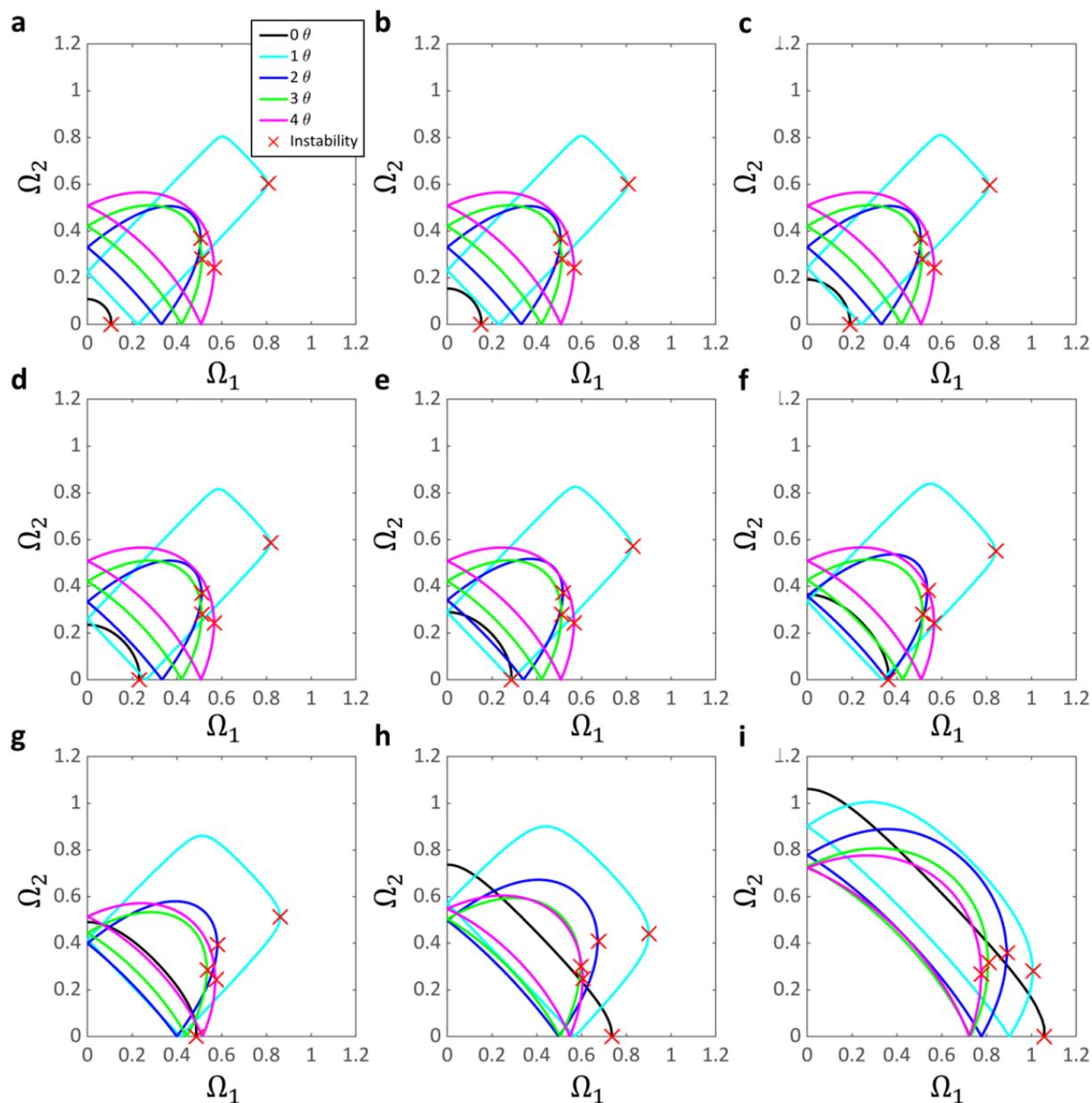


图-11 Campbell 图。环数分别为 a 36, b 32, c 28, d 24, e 20, f 16, g 12, h 8, i 4. 结构辐条数相同 56, 孔隙率 0.5

我们最后看不同空隙率的计算结果。不同环数的多环结构图如图-10 所示，计算结果如图-11 所示。

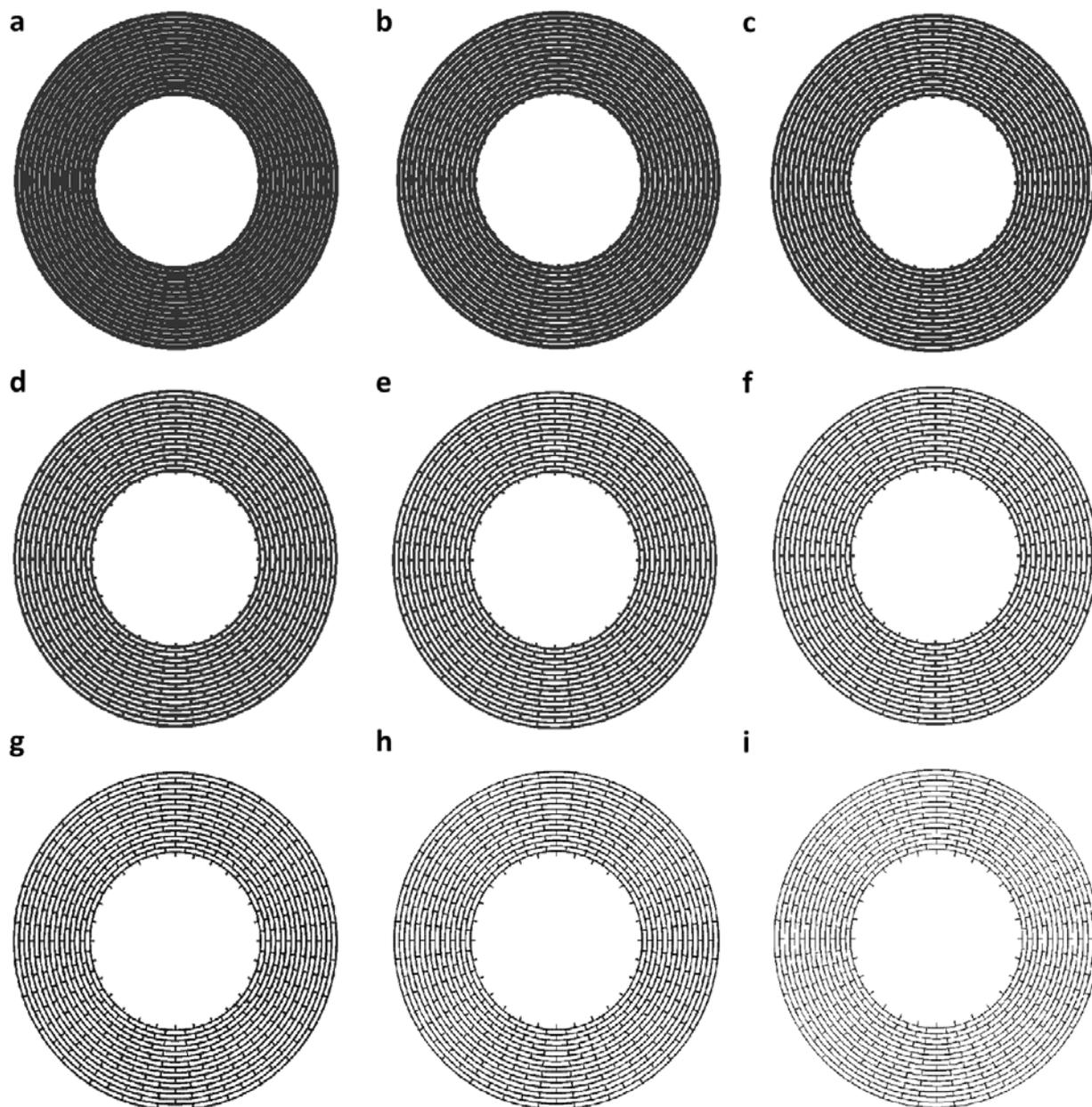


图-12 结构示意图。空隙率分别为 a 0.1, b 0.2, c 0.3, d 0.4, e 0.5, f 0.6, g 0.7, h 0.8, i 0.9. 结构辐条数相同 56, 环数 16, 内外径比 0.5

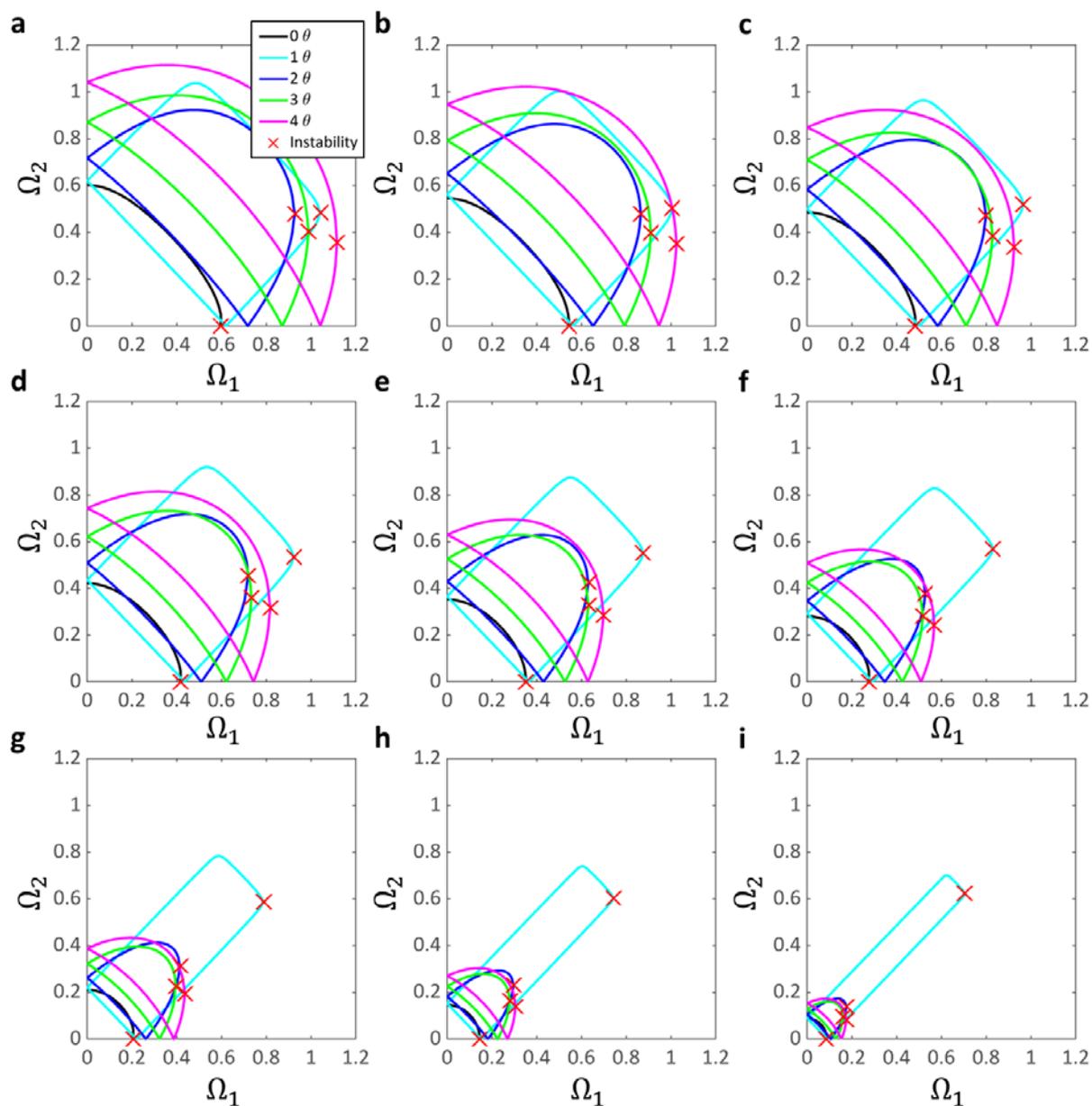


图-13 结构示意图。空隙率分别为 a 0.1, b 0.2, c 0.3, d 0.4, e 0.5, f 0.6, g 0.7, h 0.8, i 0.9。结构辐条数相同 56，环数 16，内外径比 0.5

为了更直观地展示结构参数的作用，我们进一步把结果整理如下图：

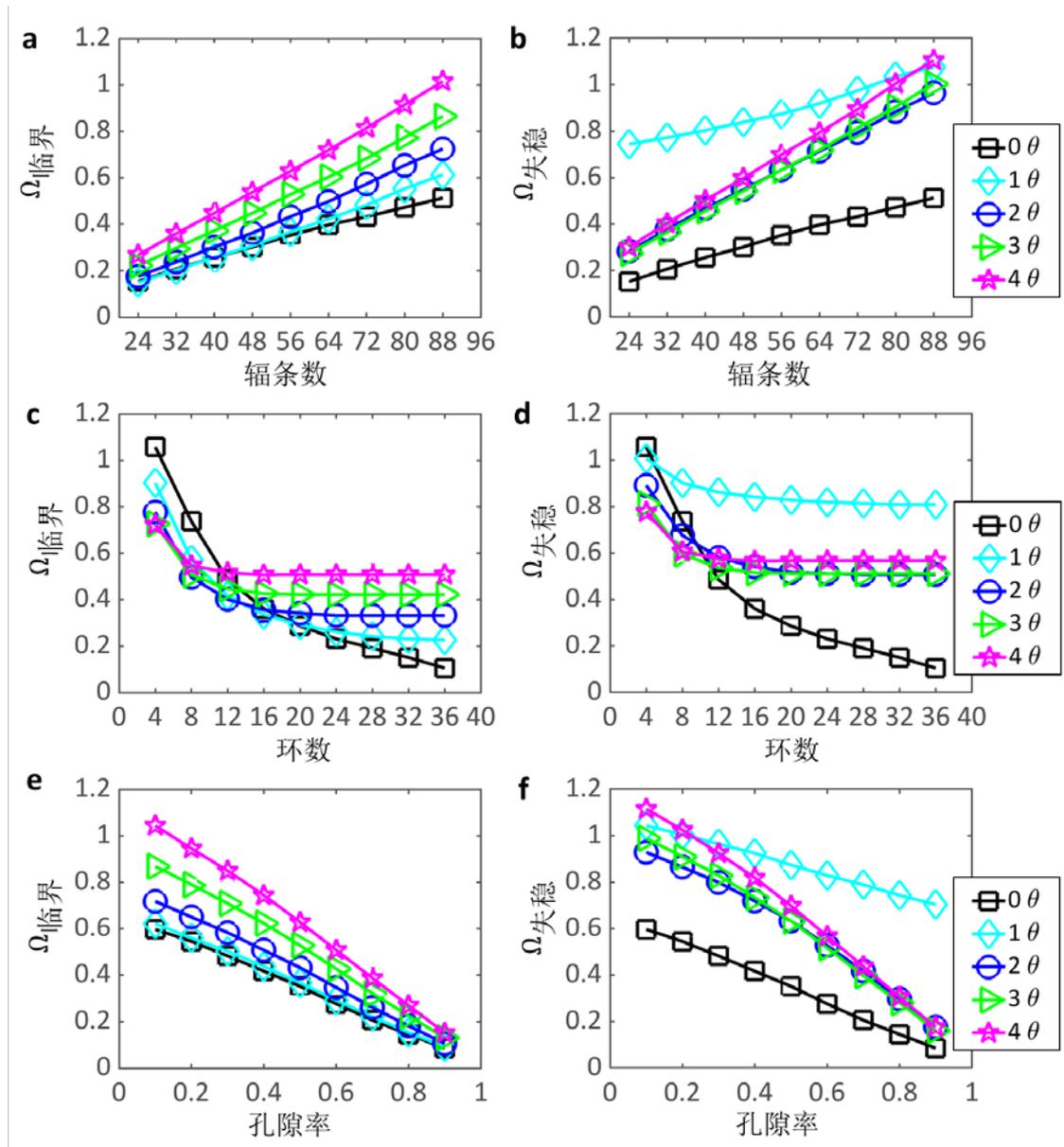


图-14 不同结构参数:辐条数、环数和孔隙率对结构临界转速和失稳转速的关系图。a 临界转速对辐条数 b 失稳转速对辐条数 c 临界转速对环数 d 失稳转速对环数 e 临界转速对孔隙率 f 失稳转速对孔隙率

小结

在这一小节，我们展示了对具有不同结构参数的旋转多环结构的 $0-\theta$ 到 $4-\theta$ 模态稳定性分析结果。结果表明增加辐条数，减小环数和减小孔隙率可以提高结构的稳定性，此外，我们从图中观察到这些模态对应的自然频率和临界频率十分近似，因此，我们也可得出结论，对于这些模态，增加辐条数，减小环数和减小孔隙率可以提高结构的自然频率。换言之，提高结构的自然频率可以提高结构的

稳定性。

2.4 陀螺虚拟样机和优化技术

在 2.2 节的研究可以视为对以全角模式工作的多环陀螺的结构优化，即如何设计结构使其工作频率最大（即自然频率）。在这一节，我们基于参数化建模技术和有限元分析技术，以 MEMS 多环陀螺为研究对象，以力平衡模式下的标度因数为优化目标，通过构建虚拟样机和大规模模拟比较的方法，找到不同参数下的最优结构。考虑如下的测控方式，图-15 (a)

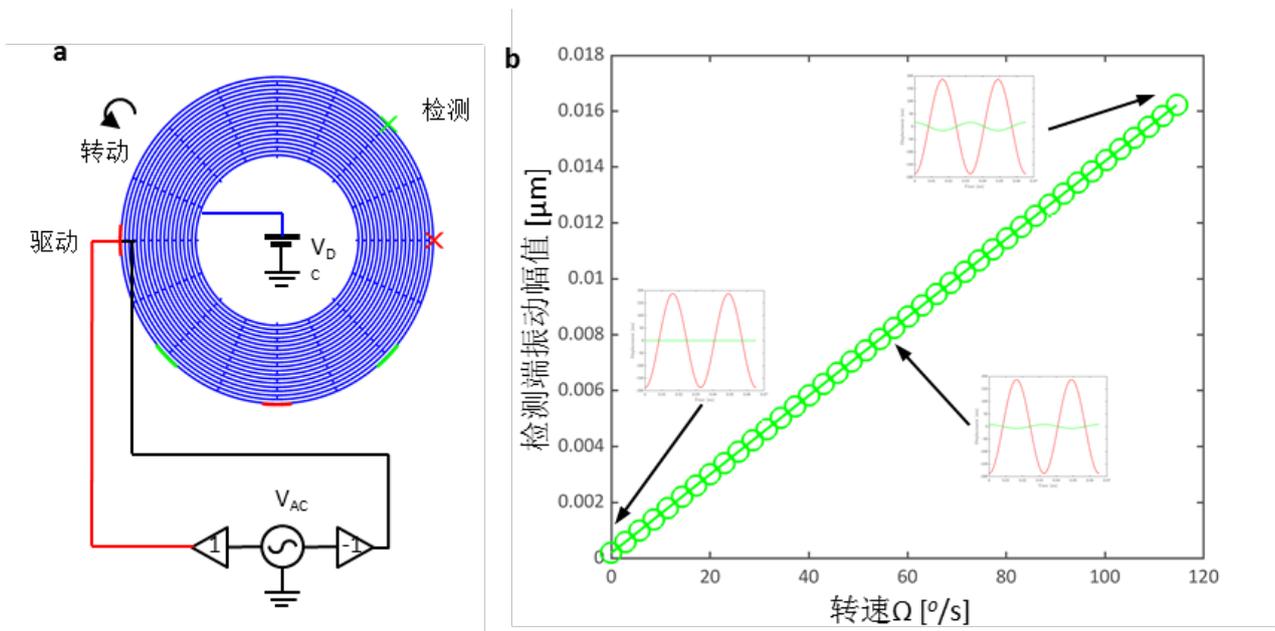


图-15 多环陀螺测控构型和仿真结果图

首先给出优化的基准参数：

- (1) 环数：20
- (2) 辐条数：16
- (3) 外径：4000 μm
- (4) 环间距：100 μm
- (5) 环宽度：50 μm

- (6) 辐条宽度: $50\mu\text{m}$
- (7) 圆片厚度: $100\mu\text{m}$
- (8) 电极夹角: 11.5°
- (9) 直流电压: 10V
- (10) 交流电压: 100mV
- (11) Rayleigh 阻尼系数: $1\text{E-}6, 1\text{E-}6$
- (12) 硅材料
- (13) 自然频率: 30.5757KHz , 由模态计算程序给出。

我们给出基准参数下的分析结果, 见图-15 (b)。根据分析结果, 我们可以通过计算曲线斜率得到基准参数下多环结构的机械灵敏度。当改变参数式, 重复一遍计算流程, 便可以得到新参数下的多环结构机械灵敏度。由于很多结构参数是非连续的整数, 我们采用等距采样的方式, 同时还要考虑参数选择的合理性, 计算不同参数下的多环结构灵敏度。计算结果整理如下:

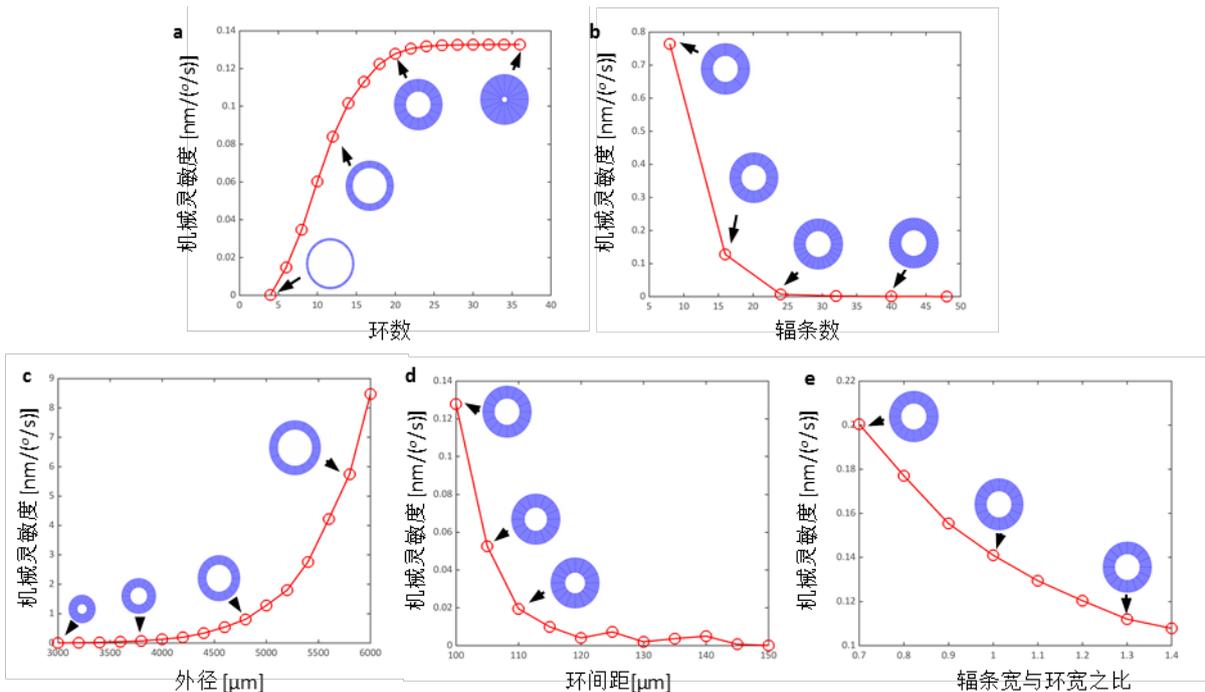


图-16 机械灵敏度分析结果。a 不同环数下的机械灵敏度;b 不同辐条数下的机械灵敏度;c 不同外径值下的机械灵敏度;d 不同环间距下的机械灵敏度;e 不同环间距下的机械灵敏度

通过参考计算结果,结合实际应用的需要,如封装尺寸要求,加工工艺精度等,便可以根据不同参数择优选择。

小结

在这一节中,我们展示了对具有不同结构参数的工作在力平衡模式下的多环陀螺的机械灵敏度的分析结果,以便在后续改进设计中参阅。

2.5 本章小结

在这一章,我们从基本的参数化建模开始介绍,随后详细地介绍了所提出的有限元法和转动结构模态的分析算法,最后将算法应用于陀螺结构的分析中,研究了多环结构不同结构参数对其自然频率的影响,对其稳定性的影响等,最后介绍了多环陀螺虚拟样机技术和基于该技术的陀螺性能参数的优化方法。这一章的主要内容是关于多环陀螺的数值模拟技术,偏重于结构设计方面,其中提出了新的算法并介绍了新的分析结果,可以加深读者对多环陀螺的了解,为后续具体控制方案的设计及结构的进一步迭代优化奠定基础。